

浅水長波流れ解析のための格子ボルツマン法

中央大学 学生員 ○石川 裕士
中央大学大学院 学生員 立石 絢也
中央大学大学院 学生員 田中 聖三
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

日本列島は四方が海で囲まれており、また地形が急峻なため、津波や高潮、洪水などといった水害に見舞われることが多い。これらの現象の予測・再現は、緊急性が高くかつ大規模計算となることが多いため、高精度かつ高速に解析できる数値解析手法の構築は工学上重要であるといえる。その数値解析手法としては、有限差分法や有限要素法などが主流であるが、近年注目を集めている方法に格子ボルツマン法 (LBM)^{1) 2)} がある。この手法は、アルゴリズム及び境界条件の処理が簡便であり、計算効率が高いといった特徴のある手法であるため、浅水長波流れ問題に対する有効な解法に成り得ると考えられる。

そこで本論文は、LBM による高精度浅水長波流れ解析手法の構築を目的とし、その精度及び有効性を検討するものである。数値解析例として、突起のある開水路流れ及びわんど内流れ場を取りあげ、本解析手法の解析精度の観点から検討を行う。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法

LBM は、格子気体法から発展した手法であり、流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子分布関数を用いて逐次計算する。そして、その粒子分布関数を用いて質量保存・運動量保存より巨視的変数を求める数値解析手法である。

LBM の適用例としては、Navier-Stokes 方程式を扱ったものがほとんどであり、浅水長波方程式への適用は数少ない。しかし、近年、Zhou らによって LBM での浅水長波流れへの応用²⁾ が提案されており、潮汐・津波などの大規模問題への適用が期待されている。

(2) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において、衝突演算項に格子 BGK モデル¹⁾ を用いた浅水長波方程式に対する格子ボルツマン方程式は以下になる。

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

上式において、左辺は粒子の並進過程、右辺の 1 項目は衝突過程、2 項目は外力項をそれぞれ示している。 f_{α} は α 方向の粒子がどれくらい存在するかということを表す粒子分布関数、 $\mathbf{e}_{\alpha}$ は粒子の並進速度ベクトル、 f_{α}^{eq} は平衡分布関数である。また、 e は $e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ で定義され、 Δt は微小時間増分量、 Δx は格子サイズである。この支配方程式により粒子

の計算を局所的に行い、陽的に未知量 f_{α} を求める。なお、本論文では 2 次元 9 速度モデルを用いている。また、 F_i は外力項であり、以下のように河床勾配、底面及び自由表面でのせん断応力、コリオリ力を用い表される。詳細は参考文献²⁾ を参照されたい。

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (2)$$

また式 (1) において、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、1 タイムステップの衝突で粒子が格子点上において一定の割合 $\frac{1}{\tau}$ で局所的な平衡状態に近づいていくことを示している。 τ は、鉛直方向に積分された渦動粘性係数 ν_e と以下のような関係にある。

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

(3) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数 f_{α}^{eq} とは、格子点上において流体が平衡状態に達したときの粒子分布であり、巨視的変数である全水深・速度を用いて以下のように求められる。

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 1 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i \\ + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \alpha = 2, 3, 4, 5 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i \\ + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \alpha = 6, 7, 8, 9 \end{cases} \quad (4)$$

上式において、 h は全水深、 u_i は流速、 g は重力加速度である。なお上式の係数は、巨視的速度においてべき級数を取り、質量保存・運動量保存を満たすように決定されている。

(4) 流れの巨視的変数

格子ボルツマン方程式では、粒子分布関数 f_{α} を未知量とし計算が行われる。流体の巨視的変数である全水深・速度は、その粒子分布関数と粒子の並進速度ベクトルを用いて以下のように計算される。

$$h = \sum_{\alpha}^9 f_{\alpha} \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha}^9 \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (6)$$

3. 数値解析例

本手法の精度及び有効性を検証するために、数値解析例として突起のある開水路流れ及びわんど内流れ場を取り扱った。

KeyWords: 格子ボルツマン法, 浅水長波流れ, 開水路流れ

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d31308@kc.chuo-u.ac.jp

(1) 突起のある開水路流れ

図-1 に解析モデル及び初期水位を示す．

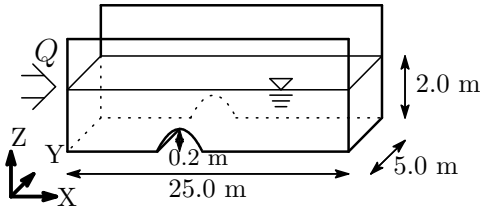


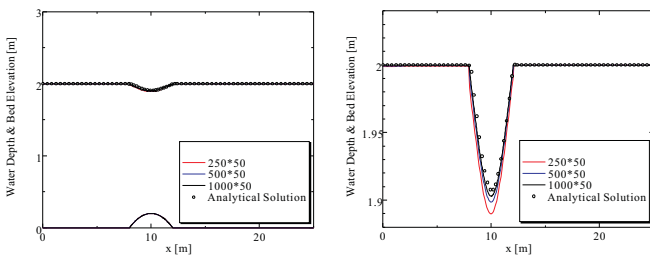
図-1 解析モデル

図-1 の左側から単位幅あたりの流量 $Q = 4.42[m^2/s]$ を流入させ、右側の流出側では、 $h = 2.0[m]$ を課すものとする．境界条件としては、側面は slip 条件とする．また、河床高度は以下の式によって与える．

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{if } 8 < x < 12 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

まず、メッシュ解像度の違いが結果に及ぼす影響を確認するために、 250×50 , 500×50 , 1000×50 分割 ($x \times y$) の 3 ケースで行い、本手法の精度検討を行った．また、計算条件としては $e = 1.0$, $\nu_e = 0.05$ とした．

解析結果として、図-2 に定常時における水面形状の比較を示す．図より、解像度による影響は多少はあるものの、本手法と厳密解との差異はほとんどないことが確認できた．



(a) 水面形状及び河床形状 (b) 水面形状拡大図

図-2 メッシュ解像度による水面形状の比較

また、本手法の計算時間及び記憶容量を安定化有限要素法と比較すると、計算時間は FEM に対して 6%、また記憶容量は 30% であり、水害予測シミュレーションのような緊急性を要する場合に有効な数値解析手法であることがいえる．

(2) わんど内流れ場

図-3 に解析モデルを示す．境界条件としては、図の左側から単位幅あたりの流量 $Q = 151.39[cm^2/s]$ を流入させ、右側の流出側では、 $h = 4.69[cm]$ を課すものとする．また、全ての壁面において slip 条件とする．

メッシュ解像度の違いが結果に及ぼす影響を確認するために、わんど内を 20×20 , 40×40 , 80×80 分割 ($x \times y$)

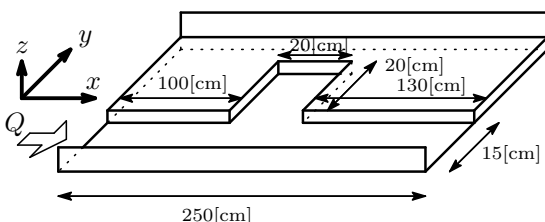


図-3 解析モデル

の 3 ケースで行い、本手法の精度検討を行った．なお、計算条件としては $e = 1.0$, $\nu_e = 3.00$ とした．

解析結果として、定常時におけるわんど内の流速ベクトルを図-4 に示す．また、定量的な検証を行うために、わんどの中心を通過する x, y 軸に対して垂直方向の流速分布を図-5 に示す．図-4 より、循環流の大きさ及び中心位置は定性的によく表現できていることが確認できる．また、図-5 より解像度による影響が確認でき、最も密な 80×80 分割メッシュでは実験値及び河原らの解析結果³⁾と良い一致を示してい

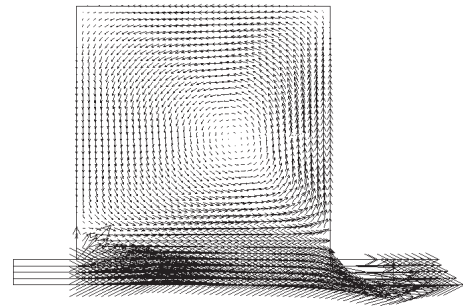


図-4 流速ベクトル図

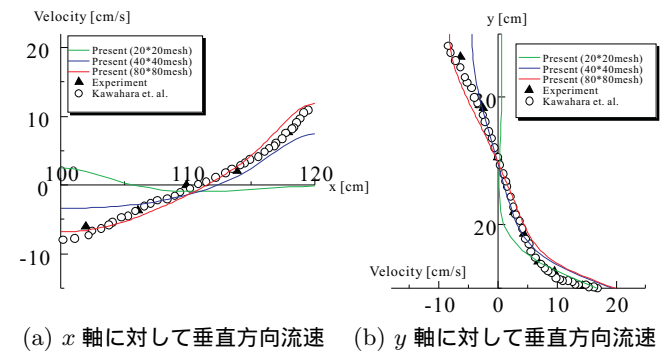


図-5 流速分布

4. おわりに

本論文では、LBM による高精度浅水長波流れ解析手法の構築を目的とし、その精度及び有効性の検証を行った．数値解析例として、突起のある開水路定常流れ及びわんど内流れ場を取りあげ、その結果以下の結論を得た．

- 本手法による計算結果は、厳密解及び実験値と良い一致を示し、計算精度の観点から本手法の有効性が確認できた．
- 本手法による計算時間と記憶容量は、FEM と比べ非常に有利であり、水害予測シミュレーションのような大規模かつ緊急性を要する場合に有効な数値解析手法であることが確認できた．

今後の課題としては、更なる精度検証、非構造格子への拡張などが挙げられる．

参考文献

- 1) 稲室隆二:格子ボルツマン法, 物性研究, 77-2, 197-232, 2001.
- 2) J.G.Zhou: Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.
- 3) 河原能久, 中川研造, Muhammad A. Jalil: 人工わんど内の流れ場の 2 次元数値解析, 第 7 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 363-366, 1993.