有限要素法による構造物に作用する流体力解析

中央大学大学院　学生員　○ 小林　義典
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

2004 年 12 月に発生したスマトラ島沖地震に伴う津波に代表されるよう，津波遡上後の氾濫流による構造物への被害は甚大である．このような被害を予測するため，氾濫流による流体力を定量的に評価することは重要であり，近年種々の数値解析手法が数多く提案されている．津波に代表される浅水長波流れ解析においては，自然地形を取り扱うことが多く，また，遡上後の複雑な建物群を考慮する必要があるため，任意形状への適合性に優れた有限要素法は有効な手法であるといえる．

そこで本論文は，SUPG 法に基づく安定化有限要素法による流体力評価手法の構築を行うものである．氾濫域における移動境界手法として，複雑地形にも適応可能な非構造格子を用いた固定メッシュに基づく Euler 的手法[1)] を適用した．数値解析例として，矩形水槽内の段波問題[2)] を取り上げ，計算結果と実験値との比較を行うことにより，本手法の有効性の検討を行った．また，同問題にて有限要素分割および境界条件の取り扱いによる計算結果の依存性を検討した．

2. 解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式には，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(h+\zeta)\,U_i\right]=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+g\frac{\partial (h+\zeta+z)}{\partial x_i} -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_h\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\Big)\right]+\frac{\tau_i^b}{\rho\,(h+\zeta)}=0 \tag{2}$$

ここで，U_i は断面平均流速，ζ は水位変動量，h は水深，z は標高値，g は重力加速度，A_h は渦動粘性係数，ρ は水の密度，τ_i^b は底面でのせん断応力である．

(2) 重み付き残差方程式

式 (1)，(2) に対し空間方向の離散化として SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いると，重み付き残差方程式は次のように表せる．

$$\int_\Omega \zeta^*\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}[(h+\zeta)U_i]\Big)d\Omega +\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\tau U_j\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(h+\zeta)\,U_i\right]\Big)d\Omega +\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\delta\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}d\Omega=0 \tag{3}$$

$$\int_\Omega U_i^*\Big(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+g\frac{\partial(h+\zeta+z)}{\partial x_i}+\frac{\tau_i^b}{\rho\,(h+\zeta)}\Big)d\Omega +\int_\Omega\frac{\partial U_i^*}{\partial x_j}A_h\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\Big)d\Omega +\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\tau U_k\frac{\partial U_i^*}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} +g\frac{\partial(h+\zeta+z)}{\partial x_i}+\frac{\tau_i^b}{\rho\,(h+\zeta)}\Big)d\Omega +\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\delta\frac{\partial U_i^*}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}d\Omega=\int_\Gamma U_i^*\hat{t}_i d\Gamma \tag{4}$$

ここで式 (3) における第二項および式 (4) における第三項は SUPG 法による安定化項を表し，式 (3) における第三項および式 (4) における第四項は Shock-Capturing 項を表す．また τ,δ は安定化パラメータ，$\hat{t}_i$ はトラクションである．

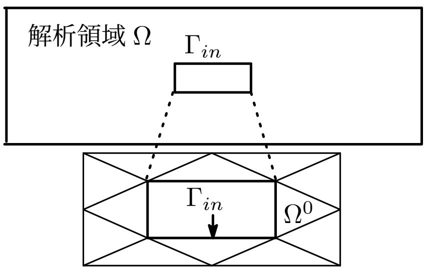
また時間方向の離散化に対しては，前進差分近似を用い，連立一次方程式の解法には，陽解法であるマルチパス法を用いた．

(3) 移動境界手法

本論文では，移動境界手法として複雑地形に対する適応性に優れた固定メッシュに基づく Euler 的手法を用いる．Euler 的手法とは対象領域を有限要素分割において，各時間ステップごとに水深の有無を調べ，水際線の挙動を評価する手法である．アルゴリズムの詳細は参考文献[1)] を参照されたい．

(4) 流体力評価手法

本論文では，流体力を毎時間ステップごとに計算された流速と水位を用いて式 (4) の右辺の境界積分項より求める．**図-1** に示すよう，解析領域 Ω 内部に境界 Γ_{in} が存在したとする．物体周りの一層分のメッシュにより構成される領域



図－１　解析領域と物体周りのメッシュ拡大図

Ω^0 では，式 (4) が成り立つ．ここで，右辺項の $\hat{t}_i$ はトラクションであり，「境界に働く単位面積毎の力」を表す．つまり，領域 Ω^0 では，式 (4) の右辺の境界積分項そのものが物体周りに働く流体力となる．よって，式 (5) に計算された流速と水位を代入する事により流体力 T_i が求められる．

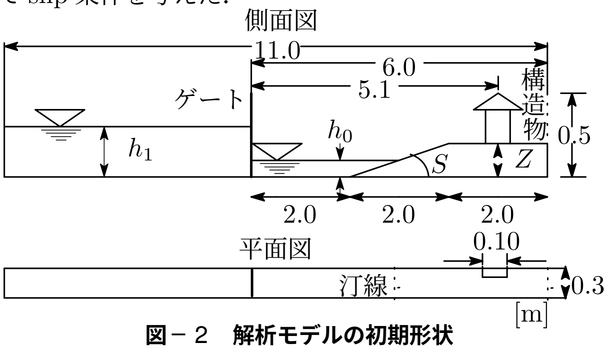
KeyWords：　有限要素法，SUPG 法，移動境界問題，流体力
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: y-kobayashi4@civil.chuo-u.ac.jp

$$T_i^{n+1} = \int_{\Omega^0} U_i^* \Big(\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + U_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_j} + g \frac{\partial (h^n + \zeta^n + z)}{\partial x_i} + \frac{\tau_i^b}{\rho\,(h^n + \zeta^n)} \Big) d\Omega + \int_{\Omega^0} \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j} A_h \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \qquad (5)$$

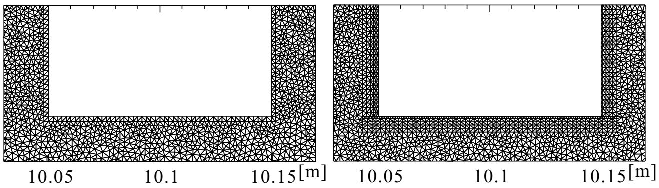
3. 数値解析例

(1) 矩形水槽内段波問題

本流体力評価手法の有効性を検討するため，**図-2** に示す矩形水槽内の段波問題を取り上げる．水槽諸量としては，$h_1 = 19.0$cm，$h_0 = 9.0$cm，$Z = 11.0$cm，tan$S = 1/18$ である．また，有限要素分割および境界条件の取り扱いによる計算結果の依存性を検討した．有限要素分割の違いとして mesh1，2，境界条件の違いとして構造物壁面で slip または nonslip 条件とする計 4 ケースとした．mesh1，2 の構造物周りの有限要素分割図を**図-3** に示す．mesh1（総節点数 18125，総要素数 35015）は，全体に非構造格子を用い構造物周りにおいて単層構造格子とした．また，mesh2（総節点数 18674，総要素数 36107）は，構造物周り五層を構造格子とした．解析条件としマルチパス法の反復回数は 3 回，陸水判定に用いる微小量 ε は 0.1mm，渦動粘性係数は 1.0×10^3[cm^2/sec]，微小時間増分量は mesh1，2 に対しそれぞれ 1.0×10^{-5}[sec]，5.0×10^{-6}[sec] を用いた．水槽壁面の境界条件として，右端で流速，水位ともに free，他の壁面で slip 条件を与えた．



図－２　解析モデルの初期形状

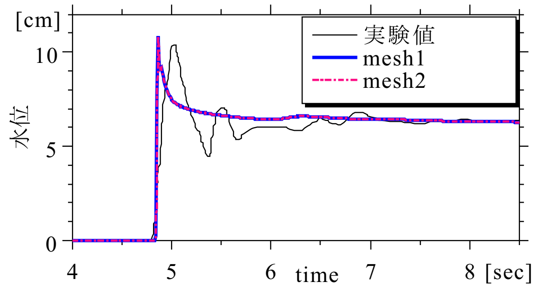


(a) mesh1　　(b) mesh2

図－３　有限要素分割図

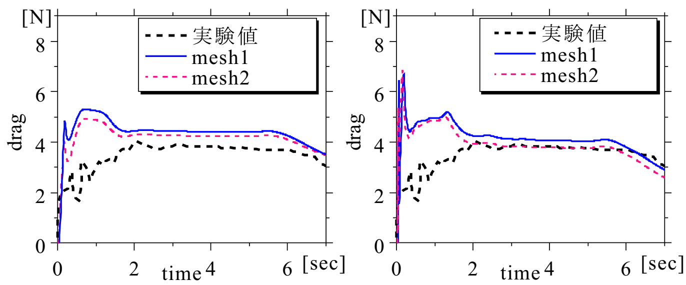
構造物前面における水位の時刻歴を**図-4** に示す．松冨らの実験値[2)]と比較を行い，計算結果の妥当性を検討した．構造物壁面での境界条件としては nonslip 条件を与えた．計算結果は，実験値と比べるとピーク値は良い一致をしているものの正確に挙動を捉えられていない．原因としては，波の分散性を考慮していないことにより，段波後方に分散波が生じていないためと考えられる．また，有限要素分割の違いによる水位時刻歴に差異は見られなかった．

有限要素分割および境界条件の依存性を検討するため，mesh1，2 を用い，構造物壁面の境界に slip，nonslip 条件を



図－４　構造物前面における水位の時刻歴

与えた計 4 ケースの構造物に加わる流体力の時刻歴を**図-5** に示す．4 ケースともに波の衝突直後における流体力は，実験値に比べ過大に評価したが，その後は良い一致を示した．差異の原因としては，分散性を考慮していないことにより波が前傾化したためと考えられる．有限要素分割による結果の差異としては，構造物周りにおいて単層構造格子を用いた mesh1 に比べ五層構造格子を用いた mesh2 の方がより実験値に近づく結果となった．また，境界条件による結果の差異については，波の衝突直後において，構造物壁面で slip 条件としたケースの方が流体力は小さく見積もられ，実験値に近いものとなった．しかし，その後は，nonslip 条件としたケースの方が実験値と良い一致を示す結果となった．



(a)slip 条件　　**(b)**nonslip 条件

図－５　流体力の時刻歴の比較

4. おわりに

本論文は，任意形状への適用性に優れた有限要素法に基づく流体力評価手法の構築を行った．本手法の有効性を検討するため，数値解析例とし段波問題を取り上げ，計算結果と実験値の比較を行った．その結果，以下の結論を得た．

- 水位のピークは，良い一致を示したが，時刻歴の形状は実験値と差異が見られた．また，流体力において，波の衝突直後において差異が見られたが，その後は良い一致を示した．差異が見られた理由としては，波の分散性を考慮していないためと考えられる．
- 有限要素分割および境界条件の違いによる計算結果から，構造物周りおいて多層の構造格子を用い，nonslip 条件を与えたケースが実験値と最も良い一致を示した．

今後の課題として，波の伝播・変形を正しく捉えるため，分散項の考慮が挙げられる．

参考文献

1) Mutsuto Kawahara, Tsuyoshi Umetsu：‘Finite element method for moving boundary problems in river flow’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6, pp.365-386, 1986.

2) 松冨 英夫・大向 達也：‘津波氾濫流の流体力に関する実験 ’, 海岸工学論文集第 46 巻，土木学会, pp336-340,1999.