

中央大学理工学部	学生員	○佐藤 学
中央大学大学院	学生員	山田 拓也
中央大学理工学部	正会員	岡田 将治
中央大学理工学部	フェロー会員	山田 正

1.はじめに

密度成層をした流体からの取水時には流体内部において波動が存在する.山田ら^{1) 2)}はこの波動に着目し運動方程式の移流項を部分的に残した Oseen 近似に基づく理論展開を行い,ラプラス逆変換による解析解を得ている.この解析解は単一モードのみが進行している場合は流体内部の波動を示している.本研究では密度成層した貯水池から一定流量を取水した時の貯水池内流動を 3 次元数値計算を用いて解析した.また,線形の繰り込み解によって選択取水時の取水幅と内部フルード数の関係を導き,繰り込み解の取水幅を数値計算の結果と比較した.

2.過去の研究山田ら^{1) 2)}の研究は基礎方程式として,式(1)(2)(3)(4)を用いた.式(1)(2)より,圧力 P を消去すると式(5)となる.ここに $\omega: \partial u / \partial x - \partial v / \partial y, D/Dt = \partial / \partial t - U \partial / \partial x$ である.さらにラグランジュの流れ関数を用いると $u = \partial \psi / \partial y, v = -\partial \psi / \partial x, \omega = \nabla^2 \psi$ より式(5)は式(6)になる.式(3)(6)から密度 ρ を消去し式(7)を得る.密度分布は線形と仮定し,密度勾配を ε とすると式(8)となる.式(8)がこの解析の基本式である.無次元化は長さの基準として水深 d , 時間には密度成層の勾配 ε から決まる時間スケール T を用いると式(9)になる.ただし, $\varphi = \psi T/d^2$, レイノルズ数 $Re = d^2/\nu T$, 内部フルード数 $Fr = UT/d$ とする.(9)式に対する境界条件及び初期条件としては全壁面で滑りを許すとし,式(10)とする.式(11)にラプラス変換を式(10)の(iv)を考慮して行くと式(12)となり, $\bar{\varphi}$ を y 方向にフーリエ変換を行い,その中の任意の一項に関して式(12)の解の形を式(13)のように与える.ここに $\bar{\varphi}: \varphi$ の偶関数, A_n : 境界条件より決まる定数, $k = n\pi$ ($n=1,2,3,\dots$) である.式(13)を式(12)に代入し,若干の計算の後 α を決める方程式(14)を得る.これから根 α を求めることは困難である.よって,極限の場合を考えることにする.a). $Fr \rightarrow 0, Re \rightarrow 0$ (移流項無視,非粘性無視)この時(15)式の根は $\alpha = \pm P/\sqrt{P^2+1}$ となり,これを式(13)に代入すると式(15)を得る.式(15)のラプラス逆変換をとれば式(16)を得る.ところで,式(15)の解はある種の波動現象を表しており,この波動は固有関数(モード)によって決まる伝播速度 C_n をもっており, $C_n = 1/n\pi$ と示されている. C_n を次元をもつ形で表すと $d/n\pi T$ での上流に遡上し得るモード(n)は $d/n\pi T > q/d$ を満たし,これを内部フルード数で表すと $1/n\pi > Fr$ となる.つまり,モード(n)によっては波速が平均流速よりも小さくなり上流に遡上できないものも存在する.すべてのモードが出揃うと以後は定常な流れとなる.しかし,各モード間における非線形の干渉を考慮しなければならない事を示している.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4) \quad \frac{D\omega}{Dt} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (5) \quad \frac{D\nabla^2 \psi}{Dt} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y^2} \quad (6) \\ \frac{D^2 \nabla^2 \psi}{Dt^2} &= \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{D}{Dt} \frac{\partial^2 \nabla^2 \psi}{\partial y^2} \quad (7) \quad \frac{D^2 \nabla^2 \psi}{Dt^2} + \alpha g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nu \frac{D}{Dt} \frac{\partial^2 \nabla^2 \psi}{\partial y^2} \quad (8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - Fr \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} \frac{D}{D\tau} \left(\frac{\partial^2 \nabla^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) \quad (9) \quad \begin{aligned} &\text{(i)} \varphi = 0, 0 \leq \xi < \infty, \eta = 0, 1 \text{ (ii)} \varphi = 0, 0 \leq \xi \leq 1, \xi \rightarrow \infty \\ &\text{(iii)} \varphi(\xi=0) = [-F(\eta) + \eta Fr] H(\tau) \quad 0 \leq \eta \leq 1, \xi = 0, 1 \\ &F(\eta) = \begin{cases} 0 & 0 < \eta < b \\ Fr & b < \eta < 1 \end{cases} \quad (10) \\ &\text{(iv)} \frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial \tau} = \nabla^2 \varphi = 0, \tau < 0 \end{aligned} \\ \varphi_0 = -\eta Fr H(\tau) + \varphi(\xi, \eta, \tau) \quad (11) \quad (p - Fr \frac{\partial}{\partial \xi})^2 \nabla^2 \bar{\varphi} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} (p - Fr \frac{\partial}{\partial \xi}) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} \quad (12) \quad \bar{\varphi}_n(p) = \frac{A_n}{Kp} \cos k b \sin k \eta \exp(-a k \xi) \quad (13) \\ (p + Fr k a)^2 (a^2 - 1) + a^2 = 1/Re(p + Fr k a) \quad (14) \quad \bar{\varphi}_n(p) = \frac{A_n}{Kp} \cos k b \sin k \eta \exp\left(-\frac{p k \xi}{\sqrt{p^2+1}}\right) \quad (15) \quad \varphi_0 = Fr \left\{ -\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \cos n\pi b \sin n\pi \eta \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

3. 数値実験 3.1 基礎方程式

運動方程式は式(17)に示す. Navier-Stokes 方程式をレイノルズ平均した式を用いている.連続式は式(18)に示す.また,密度分布を塩分で与えているため式(19)の物質保存式を示す.ここで, P : 圧力, ν_T : 渦動粘性係数, k : 運動エネルギー, ρ : 密度, S : 塩分, D_s : 塩分の拡散係数

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_T \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (S u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (D_s \frac{\partial S}{\partial x_j}) \quad (19)$$

3.2 初期条件及び境界条件 本研究の数値実験で設定した貯水池を図-1 に示す. 2 次元取水を再現するため,下流端の河床から鉛直上方 35m の所に 1m 幅の取水口を設定した.初期条件は各地点における流速を 0 として貯水池内全域に与えている.密度

分布は表面密度 $\rho_0=999.7042[\text{kg/m}^3]$, 底面密度 $\rho_s=1019.484[\text{kg/m}^3]$ とし, 貯水池表面から線形に増加する密度分布を仮定する. 境界条件は下流端境界条件として取水口から一定単位幅流量 $q=0.056\text{m}^2/\text{s}$ で取水する. 上流端境界条件には密度成層を破壊しない流速で取水口から取水される流量と等量の流量を与えている. さらに全ての境界をスリップ条件とした. **3.3 数値実験結果** 単位幅流量 $q=0.056\text{m}^2/\text{s}$, $Fr=2.16 \times 10^{-3}$ の計算結果を図-2 に示す. 経過時間 $t=1\text{min}$, 及び $t=3\text{min}$ 時の取水口から 10m 間隔で上流側 40m までの各地点の流速分布である. $t=1\text{min}$ では貯水池内 $x=0\text{m}$ で鋭い流速分布形, $x=10\text{m}$ でゆるやかな凸型の流速分布形を呈す. しかし, 貯水池内全域に渡って流速が小さく, 初期条件の静止状態から変化していない. $t=3\text{min}$ では $t=1\text{min}$ と比較すると $x=0\text{m}$ で流速分布が鋭くなり. また $t=1\text{min}$, $x=10\text{m}$ で見られたモードが $t=3\text{min}$ では $x=30\text{m}$ の地点に到達していることがわかる. これは, 山田らの研究で示されているモードの伝播を表している.

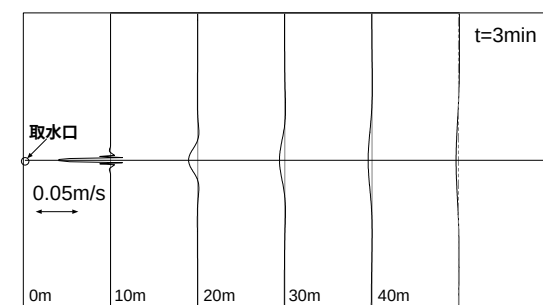
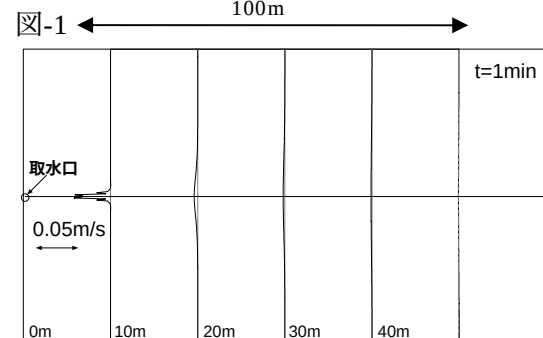
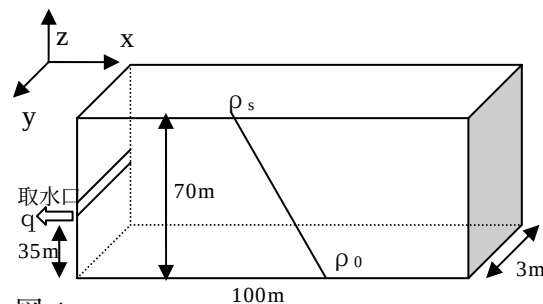


図-2 取水口からの各地点の流速分布を示す. 縦軸は水深, $t=1\text{min}$, $t=3\text{min}$ を示す.

4. 取水幅と内部フルード数の関係

選択取水時にはある一定の層だけが取水され, その層に沿って分離流線が発生する. 取水開始時の断面平均流速 V と全水深 d 及び流速分布の第1モードが到達したときの取水層内の流速を V_1 , 取水層厚を取水幅 δ と定義すると連続式が導かれる. また, 取水開始時の内部フルード数は $Fr_0=VT/d$ であり, 第1モードが到達したときの内部フルード数 Fr_1 を Fr_0 を用いて表すことが出来る. これを n 次のモードまで繰り込むことにより, n 次モードの Fr_n が求まる.

$$Fr_0 \left(\frac{d}{\delta} \right)^{2n} = \frac{1}{\pi} \quad (20)$$

$Fr_n = 1/\pi$ なので式(20)の関係を得る. 式(20)

の両辺に対数をとると n に関する関係式が得られる. 関係式中の d/δ の比は山田ら^{1) 2)}の実験により $d/\delta=2$ となることがわかっている. 図-3 は山田ら^{1) 2)}の実験より内部フルード数と取水幅との関係を示す. 内部フルード数の増加に伴い取水幅が増加することが解る. これは, 取水流量が大きくなれば取水幅が増加することを示している. また今回の数値実験では内部フルード数 $Fr=2.16 \times 10^{-3}$ の場合に, 取水幅 $\delta=10\text{m}$ を得ており, 従って全水深 $d=70\text{m}$ から $d/\delta=0.143$ となる. 図-3 の線形繰り込み解では $d/\delta=0.24$ となり, 線形の解析解に比べ数値計算では取水幅は狭くなっている. これは, 理論解析に於いて $d/\delta=2$ と設定し内部フルード数と取水幅の関係を導いたためと考えられる. 図-4 は内部フルード数とモードの関係を示している. 内部フルード数が小さくなるとより高次のモードが発生することが解る. 今回の数値実験では3次のモードまでが到達し, 以後は定常の流れとなる.

5. まとめ 3次元数値計算を用いて貯水池内流動を解析し, 貯水池内に発生するモードの伝播を示した. また, 非線形の干渉を防ぐために線形の繰り込み解によって解析解を導出した.

<参考文献> 1) 吉川秀夫, 山田正, 水谷俊孝, 第22回水理講演会論文集, pp95-100, 1978年. 2) 山田 正, 吉川 秀夫, 水谷 俊孝, 土木学会論文報告集 第280号, pp 67-79, 1978年12月.

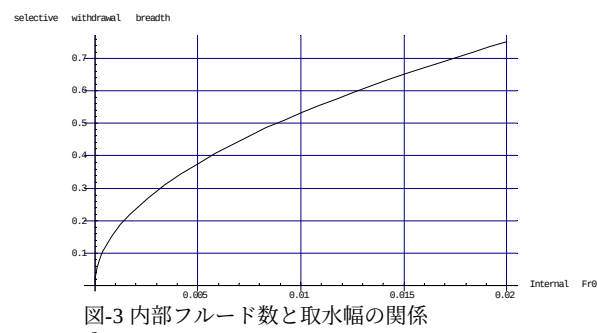


図-3 内部フルード数と取水幅の関係

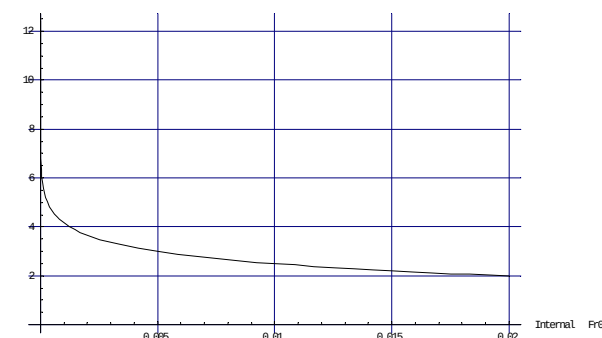


図-4 内部フルード数とモードの関係