

# 安定化有限要素法による温排水流れの解析

中央大学 学生員 奥田 耕治  
中央大学大学院 学生員 板橋 翔  
中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

原子力発電や火力発電において、発生する熱エネルギーの大半は温排水として海へ放水され、その熱拡散により、周辺の環境に影響を与えている。温排水の有効利用や未知問題の早期発見のためには、温排水による物理現象を正確に把握することは重要なことである。これらの現象の把握に数値解析が広く行われているが、海域の複雑な地形を考慮するには、任意形状への適用性に優れた有限要素法は、有効な手法といえる。

そこで本研究では、安定有限要素法に基づく、熱による浮力の効果を考慮した、熱流体解析手法を提案する。数値解析例として、2次元正方 Cavity 内自然対流問題及び温排水流れ問題を取り扱い、本手法の有効性について検討を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体を考え、Boussinesq 近似を仮定する。そのとき無次元化された運動方程式、連続式、エネルギー方程式はそれぞれ式 (1), (2), (3) で表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \delta_{i2} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3)$$

$u$  は流速,  $p$  は圧力,  $T$  は温度,  $Re (= UL/\nu)$  は Reynolds 数,  $Gr (= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$  は Grashof 数,  $Pr (= \nu/\alpha)$  は Prandtl 数,  $Ra (= Pr \times Gr)$  は Rayleigh 数をそれぞれ表している。但し  $U$  は代表流速,  $L$  は代表長さ,  $\nu$  は動粘性係数,  $g$  は重力加速度,  $\alpha$  は温度伝導率,  $\beta$  は体膨張係数,  $T_w$  は高温壁温度,  $T_c$  は低温壁温度,  $\delta_{i2}$  は Kronecker の  $\delta$  をそれぞれ表している。境界条件を以下に示す。

$$u_i = g_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (4)$$

$$\left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

$$T = \hat{T} \quad \text{on } \Gamma_T \quad (6)$$

$$S = \frac{1}{RePr} \frac{\partial T}{\partial n} = \hat{S} \quad \text{on } \Gamma_S \quad (7)$$

ここで,  $g_i, h_i$  はそれぞれ流速, トラクションの既知量,  $\hat{T}$  は壁面既知温度,  $\hat{S}$  は壁面上の単位法線方向温度勾配,  $n_j$  は外向き単位法線ベクトルを示す。

## 3. 数値解析例

### (1) 2次元正方 Cavity 内自然対流問題

#### a) 解析条件

解析領域, 境界条件及び有限要素分割例を図-1に示す。また, 平均 Nusselt 数は式 (8) で定義され, 高温壁面と低温壁面の平均 Nusselt 数の差が  $10^{-2}$  以下となった状態を定常状態とみなし, 計算を終了した。

$$\overline{Nu_{av}} = - \int_0^1 \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0,1} dy \quad (8)$$

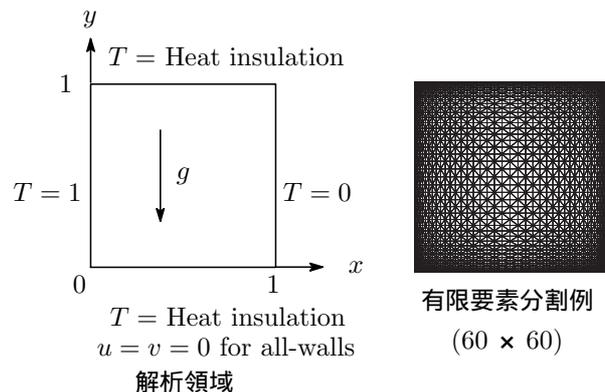


図-1 解析領域, 境界条件, 有限要素分割例

#### b) 解析結果

高温壁面の平均 Nusselt 数は Rayleigh 数のべき乗に比例することが知られており, 棚橋らの解析<sup>2)</sup>では高温壁面での平均 Nusselt 数と Rayleigh 数の関係式を最小二乗法によって求めている。式 (9), (10) はそれぞれ棚橋らの解析結果と本解析結果の, 高温壁面での平均 Nusselt 数と Rayleigh 数の関係式を示している。

$$\overline{Nu_{av}} = 0.163Ra^{0.284} \quad (9)$$

$$\overline{Nu_{av}} = 0.176Ra^{0.276} \quad (10)$$

また, 図-2には, 本解析結果での各 Rayleigh 数における流れの高温壁での平均 Nusselt 数と, 棚橋らの解析結果<sup>2)</sup>による関係式の比較を示す。高 Ra 数ではやや差異が見られるものの, 両者は概ね一致を示している。

表-1には  $Ra = 10^3 \sim 10^9$  の高温壁における平均 Nusselt 数に関する棚橋らの解析結果<sup>2)</sup>との比較を, 表-2, 3

**KeyWords** : 安定化有限要素法, 熱流体, 温排水

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d31430@educ.kc.chuo-u.ac.jp

には  $Ra = 10^7, 10^9$  における定常時の最大流速, 高温壁での最大・最小 Nusselt 数に関する棚橋らの解析結果<sup>2)</sup>との比較を示す. 但し, 表中の  $U_{max}, V_{max}$  はそれぞれ Cavity の中心軸  $x = 0.5, y = 0.5$  における速度の最大値を,  $x, y$  はそれぞれ速度の最大値の  $x, y$  の座標値を,  $Nu_{max}, Nu_{min}$  はそれぞれ高温壁面における Nusselt 数の最大値, 最小値を,  $y$  は  $Nu_{max}, Nu_{min}$  の  $y$  の座標値を示したものである.  $Ra = 10^7$  では棚橋らの解析結果<sup>2)</sup>と良好な一致を示しているが,  $Ra = 10^9$  では両者に若干の差異が現れた.

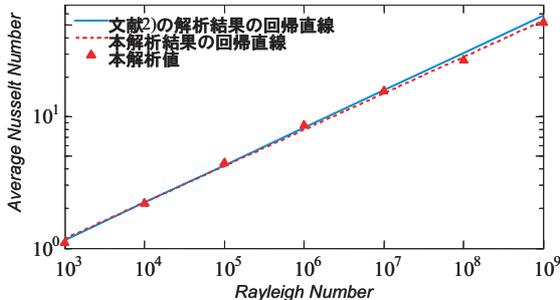


図-2 高温壁における平均 Nusselt 数と Rayleigh 数の関係

表-1 高温壁における平均 Nusselt 数

$Ra$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$
本解析	1.098	2.215	4.483	8.937	16.98	30.68	53.88
文献 2)	1.114	2.206	4.438	8.819	16.74	29.86	56.47

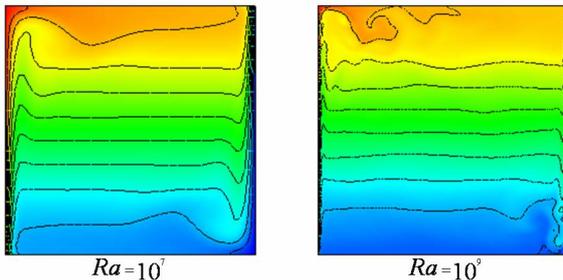


図-3 等温分布図

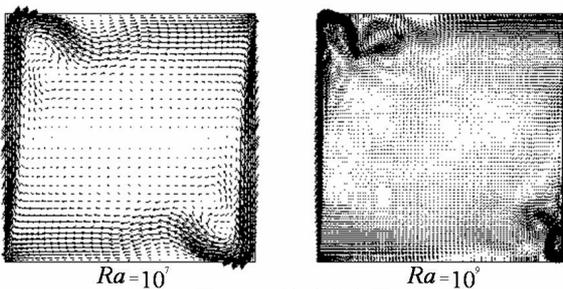


図-4 流速分布図

表-2  $Ra = 10^7$  における解析結果の比較

	$\Delta L_{min}$ (要素分割数)	$U_{max}$ $y$	$V_{max}$ $x$	$Nu_{max}$ $y$	$Nu_{min}$ $y$
本解析	$8.22 \times 10^{-3}$ (40 × 40)	148.3145 0.8848	708.1353 0.0182	37.8373 0.0299	1.347 1.0000
文献 2)	$8.23 \times 10^{-3}$ (40 × 40)	148.00 0.8858	687.00 0.0173	37.399 0.0173	1.401 1.0000

表-3  $Ra = 10^9$  における解析結果の比較

	$\Delta L_{min}$ (要素分割数)	$U_{max}$ $y$	$V_{max}$ $x$	$Nu_{max}$ $y$	$Nu_{min}$ $y$
本解析	$3.19 \times 10^{-3}$ (100 × 100)	850.661 0.9369	7530.205 0.00664	156.890 0.0143	3.3047 1.000
文献 2)	$3.19 \times 10^{-3}$ (100 × 100)	603.00 0.9615	7210.00 0.00065	165.43 0.00	3.649 1.0000

## (2) 熱塩混合モデル解析

運動方程式, 連続式, エネルギー方程式, 塩分保存式はそれぞれ式 (11), (12), (13), (14) で表される.

運動方程式;

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\nu + \varepsilon_{m_j}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{g_y}{\rho_0} (\rho_0 - \rho) \delta_{i2} = 0 \quad (11)$$

連続式;

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

エネルギー方程式;

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_j} - (\kappa_t + \varepsilon_{t_j}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = 0 \quad (13)$$

塩分保存式;

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_i \frac{\partial s}{\partial x_j} - (\kappa_s + \varepsilon_{s_j}) \frac{\partial^2 s}{\partial x_j^2} = 0 \quad (14)$$

ここで,  $u_i$  は流速,  $p$  は圧力,  $\nu$  は動粘性係数,  $\rho$  は密度,  $\rho_0$  は基準密度,  $g_y$  は重力加速度,  $T$  は温度,  $T_0$  は基準温度,  $s$  は塩分濃度,  $s_0$  は基準塩分濃度,  $\delta_{i2}$  は Kronecker の  $\delta$ ,  $\kappa_t$  は熱の分子拡散係数,  $\kappa_s$  は塩の分子拡散係数,  $\varepsilon_m$  は渦動粘性係数,  $\varepsilon_t$  は熱の渦動拡散係数,  $\varepsilon_s$  は塩分の渦動拡散係数を表す.

なお, 解析条件及び解析結果については, 講演時に示す予定である.

## 4. おわりに

本報告では, 安定化有限要素法に基づく, 熱による浮力の効果を考慮した, 熱流体解析手法を提案し, 2次元正方形 Cavity 内自然対流問題を取り扱い, 本手法の有効性について検討を行った. 本手法による計算結果は, 低 Rayleigh 数から高 Rayleigh 数にかけて他の参照解と良好な一致を示すことができ, 定量的に本手法の有効性を確認することができた.

今後の課題として, 温排水現象の解析を行い, 有効性の検討を行うことが挙げられる.

## 参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44,1991.
- 2) 柴田悦太郎, 楨原孝文, 棚橋隆彦 : CIP 有限要素法を用いた高 Rayleigh 数正方形 Cavity 内自然対流解析, 計算工学講演論文集, 3, pp.99-106, 1998.
- 3) 仲敷憲和, 成層剪断流中の熱-塩拡散特性について, 水工学論文集, 35, pp.185-190, 1991.