一般化座標を用いた蛇行河川における波動解析

中央大学大学院　学生員　○山田 拓也
中央大学理工学部　正会員　岡田 将治
中央大学理工学部　フェロー会員　山田 正

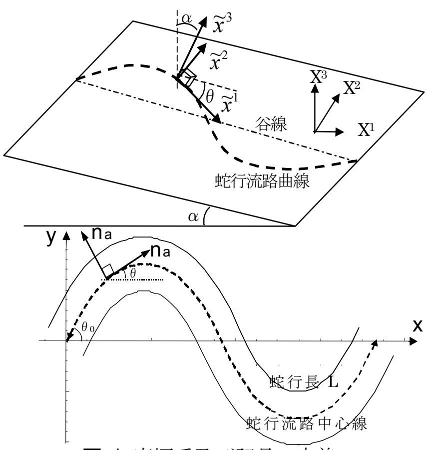
1. はじめに

津波の河川遡上や洪水波の流下等，河川を伝播する波動現象は河川管理上非常に重要な問題である.特に河川蛇行部では曲率に伴う遠心力の影響により，波の振幅が増大する事が考えられる.本研究では蛇行河川の曲率変化に伴う波の波高増大効果に注目した流況・波動解析を目的とし，第一次解析としてSine Generated Curveで表現される蛇行河川における定常時の水面形を定在波と考慮して，水面形の理論解を求めた.解析においては河川形状を正確に反映するため，蛇行河川の形状に適合する一般化座標系へオイラー方程式を座標変換し基礎式とした.

2. 基礎方程式及び座標変換

流体運動を理論解析や数値実験で解析する場合，解析空間は通常，複雑な地形形状を有する場合が多い.このような場合，デカルト座標系に基づき矩形メッシュを作成して解析を行う事は，物理現象を正しく捉えられず，解析上も境界条件の設定が非常に複雑になるため解析手法として有効ではない.この様な背景から，本研究ではテンソル解析を用いて任意の地形に沿う一般化座標系への座標変換を行い，流況・波動現象の解析を行う. 以下に蛇行河川を適合する座標系に於けるオイラー方程式を示す. テンソル表記のオイラー方程式及び連続式は次式で表される.

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t}+\tilde{u}^j\cdot\tilde{u}^i{}_j=-\frac{1}{\rho}\tilde{G}^{ij}p_{;j}-g\tilde{G}^{ij}\frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^j}\cdots(1)\qquad \tilde{u}^j{}_{;j}=0\cdots(2)$$



図−1 座標系及び記号の定義

$\tilde{x}^i=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)$ はデカルト座標，$x^i=(x^1,x^2,x^3)=(x,y,z)$ は地形適合座標，$\tilde{u}^i$ はi方向流速のテンソル成分，下付添字はテンソルの共変成分，上付添字は反変成分を表す. またρは密度，gは重力加速度，$\tilde{G}^{ij}$ は共変計量テンソル，Lは蛇行長，下付添字;は共変微分であり，式(6)の全項は反変テンソル成分である. 地形適合座標系の概要及び変数定義を**図−1**に示す. 地形適合座標系の一例として，蛇行河川に沿う座標系とデカルト座標の関係式を式(3)(4)(5)に示す. 式(6)を適用すると，Sine Generated Curve座標系となる.

$$x^1=\left(\int_0^{\tilde{x}^1}\cos\theta d\tilde{x}^1-\tilde{x}^2\sin\theta\right)\cos\alpha+\tilde{x}^3\sin\alpha\quad\cdots(3)\qquad x^2=\int_0^{\tilde{x}^1}\sin\theta d\tilde{x}^1+\tilde{x}^3\cos\alpha\ \cdots(4)$$

$$x^3=-\left(\int_0^{\tilde{x}^1}\cos\theta d\tilde{x}^1-\tilde{x}^2\sin\theta\right)\sin\alpha+\tilde{x}^3\cos\alpha\cdots(5)\qquad \theta=\theta_0\cos\frac{2\pi\tilde{x}^1}{L}\cdots(6)$$

式(1)(2)を地形適合座標系に変換した式を示す. 式(7)(8)(9)は各々 $\tilde{x}^1$，$\tilde{x}^2$，$\tilde{x}^3$ 方向の運動方程式，式(10)は連続式であり，$\overline{u}^i$ はテンソル成分から物理成分へと変換した蛇行河川に沿う座標でのi方向流速である. 但し，式(7)(8)(9)は谷線と流路中心線との偏角 θ(Sine Generated Curve では式(6))を適用しておらず，従って偏角 θ の与え方により，様々な蛇行河川形状に適用可能な，極めて一般的なオイラー方程式である. 従って，現実の河川形状を理論・数値解析における地形適合座標として取り込むためには，偏角 θ を実際の河川形状に合う様に定めればよい.

$$\frac{\partial\overline{u}^1}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)}\overline{u}^1\frac{\partial\overline{u}^1}{\partial\tilde{x}^1}+\overline{u}^2\frac{\partial\overline{u}^1}{\partial\tilde{x}^2}+\overline{u}^3\frac{\partial\overline{u}^1}{\partial\tilde{x}^3}-\overline{u}^1\overline{u}^2\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1}\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}-g\cos\theta\sin\alpha+\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^1}=0\ \cdots(7)$$

$$\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)}\overline{u}^1\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial\tilde{x}^1}+\overline{u}^2\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial\tilde{x}^2}+\overline{u}^3\frac{\partial\overline{u}^2}{\partial\tilde{x}^3}-\left(\overline{u}^1\right)^2\frac{1}{\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)}\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}+g\sin\theta\cos\alpha+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^2}=0\ \cdots(8)$$

$$\frac{\partial\overline{u}^3}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)}\overline{u}^1\frac{\partial\overline{u}^3}{\partial\tilde{x}^1}+\overline{u}^2\frac{\partial\overline{u}^3}{\partial\tilde{x}^2}+\overline{u}^3\frac{\partial\overline{u}^3}{\partial\tilde{x}^3}+g\cos\alpha+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\tilde{x}^3}=0\cdots(9)\qquad \frac{\partial\overline{u}^1}{\partial\tilde{x}^1}+\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^2}\left\{\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)\overline{u}^2\right\}+\left(1-\overline{x}^2\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)\frac{\partial\overline{u}^3}{\partial\tilde{x}^3}=0\ \cdots(10)$$

ここで $\tilde{x}^i=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)=(s_a,n_a,z_a)$ とし，式(8)を用いて静水圧近似を適用後，式(7)(8)(10)を z_a 方向に断面積分を行い流下方向及び横断方向の流量フラックスM, Nを用いて上式を書き直す.ただし水面には運動学的条件，河床は平坦床と設定した.

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial}{\partial s_a}\left(\frac{\alpha M^2}{\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\beta MN}{\eta}\right)-\frac{2\beta MN}{\eta\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}-g\eta\sin\theta\cos\alpha+g\eta\cos\alpha\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial s_a}=0\ \cdots(11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial}{\partial s_a}\left(\frac{\beta MN}{\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\gamma N^2}{\eta}\right)-\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\left(\frac{\alpha M^2-\gamma N^2}{\eta}\right)+g\eta\sin\theta\cos\alpha+g\eta\cos\alpha\frac{\partial\eta}{\partial n_a}=0\ \cdots(12)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{\partial M}{\partial s_a}-\frac{N}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}+\frac{\partial N}{\partial n_a}=0\ \cdots(13)$$

ただし，α, β, γ は運動量補正係数,η は水深である. また式(11)(12)の左辺第4項は，各々遠心力の効果を表している.

キーワード　一般化座標　蛇行河川　水面形　波動解析
連絡先 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部 TEL03-3817-1805　E-mail:y-takuya@civil.chuo-u.ac.jp

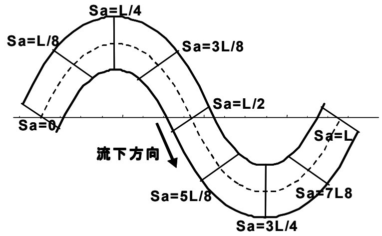
3. 第一近似解の導出

河川に沿う座標系における波動解析として断面積分表示の sa, na 方向運動方程式(11)(12)及び連続式(13)を用いて理論解析を行う.第一解析として,流下・横断方向運動方程式について以下を仮定し第一近似解を求めた。運動量補正係数 α, β, γ は1とし,河床を平坦床と仮定した.流下方向軸 s_a は流線と一致し,従って横断方向流量フラックスNは無視し2次流の影響は考慮しない.また蛇行河川の流れは定常とし,粘性及び移流の影響は考慮しない.流下方向フラックスによる横断方向の遠心力の影響のみを考慮すると,横断方向運動方程式(12)より遠心力と水面勾配の釣り合いの式(14)が求まる.実現象では湾曲部で二次流の発生等,複雑な流れ場が形成されるが式(14)では考慮していない.さらに空間的に平均水深からの水深変化及び平均流速からの流速変化は小さいと仮定し,全地点で流下方向流量フラックスを $M=Uh_0$ とする.U:平均流速,h_0:平均水深である.二次流は水面付近では内岸から外岸方向へ,水底付近では外岸から内岸方向へと流れる.従って内岸及び外岸において流下方向運動量が交換される事で,流下方向流速が蛇行横断方向に平均化されると考えたためである.以上より式(14)を線形化し整理する.

$$-\frac{1}{\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right)}\frac{d\theta}{ds_a}\left(\frac{M^2}{\eta}\right)+g\eta\frac{\partial\eta}{\partial n_a}=0 \cdots(14) \qquad \frac{\partial\eta}{\partial n_a}=\frac{U^2}{g}\frac{\partial}{\partial n_a}\ln\left(1-n_a\frac{d\theta}{ds_a}\right) \cdots(15)$$

式(15)を Sine Generated Curve 座標系で表現される蛇行河川に設定するために式(6)を代入し,流下方向距離 $Sa=L/2$ で $\eta=h_0$ の条件下に解くと,第一近似解(16)を得る.

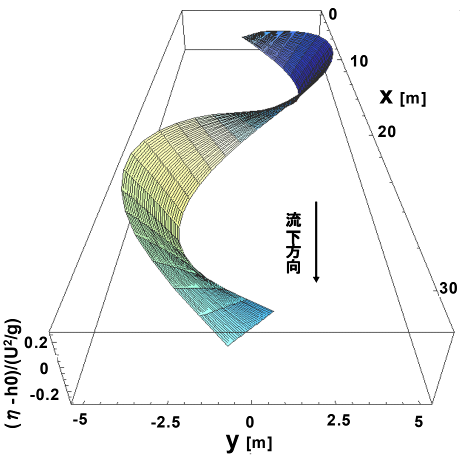
$$\eta=\frac{U^2}{g}\ln\left(1+\frac{2\pi\theta_0}{L}n_a\sin\frac{2\pi s_a}{L}\right)+h \cdots(16) \qquad \frac{2\pi\theta_0}{L}n_a\sin\frac{2\pi s_a}{L}>-1 \cdots(17)$$



図−2 計算水路図

表−1 Yen の水路実験設定緒言

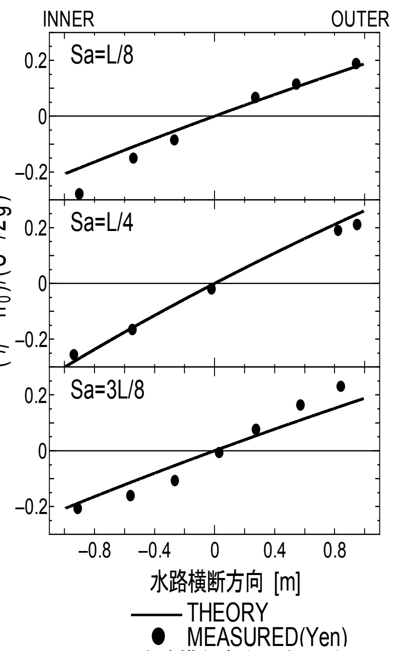
平均水深	h_0	15.6 [cm]	最大偏角	θ_0	π/4
水路幅	B	198.6 [cm]	平均流速	U	69.1 [cm/s]
蛇行長	L	3532.8[cm]	水路床勾配	α	0.0084
			法面勾配		1:1



図−3 蛇行河川の水面形

4. 解析結果

第一近似解(16)について考察する.蛇行河川の水位変位は右辺第一項の自然対数により表現されている.従って式(16)には成立条件式(17)が存在する.これは蛇行河川に適合する座標系において横断方向の座標軸が交わらない条件,つまり座標が多価にならない条件である.**図−2** に計算水路図,**表−1** に Yen[1] の蛇行水路実験条件を示し,第一近似解との比較を行う.**図−3, 4** は Yen の水路実験に対応させた蛇行水路水面形の計算結果である.但し Yen の実験は台形水路を用いて行われたが,本解析では矩形水路を想定している.**図−3** より遠心力により河川蛇行部の内岸において水位が下降し,外岸において水位が上昇している事がわかる.粘性を考慮していないため水位上昇と蛇行河川の位相差は存在しない.各地点の横断方向の水面形を**図−4** に示す.**図−4** より理論解(16)は Yen の水路実験結果とよい一致を示す事が解かる.流下距離 Sa=L/8, 3L/8 における横断方向の水面形に注目すると,理論解は実験結果に比べ蛇行部の内岸で水位を高く,外岸で水位を低く見積もる事が解かる.これは Yen の水路実験と本解析の対象とする水路形状の違いによると考えられる.また本解析では側壁の影響は考慮しておらず,側壁の近傍では理論解(16)と実際の水路実験から求めた水面形には水位差が生じると考えられる.さらに,ポテンシャルフローとして考察すると,内岸に沿う流線は外岸に沿う流線に比べて水面勾配が急であり,流速が平均流速よりも速く,一方外岸では平均流速よりも遅くなる.従って内・外岸において速度水頭分の水位差が生じると考えられる.従って第一近似解(16)は水深に比べ川幅が広く側壁の影響が無視可能な蛇行水路に於いて良い一致を示すと考えられる.



図−4 水路横断方向の水面形

5. まとめ

本研究では,テンソル解析を用いて任意の河川形状に適合するオイラー方程式・二次元不定流方程式を導出した.また横断方向流量フラックスの無視など,極めて近似化した条件の下に蛇行部の水面形の第一次近似解を求め,Yen の行った水路実験結果と比較し,側壁の影響が無視できる範囲において良い一致を示す事を確認した.

参考文献 1) Yen,B.C.: Characteristics of subcritical flow in a meandering channel, Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa,77p.1965. 2)池谷 毅,玉井 信行:平坦固定床蛇行水路における 3 次元流況解析,土木学会論文報告集 Vol.342, pp.107-113.(1984)