

安定化有限要素法に基づく LES の精度検証

中央大学 学生員 仲嶋 晋一
中央大学大学院 学生員 倉橋 哲弘
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

工学的な流れや、自然界の流れの多くは乱流状態にある。乱流の予測には、実験や観測が行われてきたが、近年計算機の発達に伴い、乱流の予測に対して計算機による数値解析が多く用いられるようになってきた。これまで、乱流の数値解析手法には構造格子を用いた差分法による方法が多く用いられていた。しかし、これらの手法は任意形状への適用が容易ではない。このため、任意形状に適した精度の高い乱流の数値解析手法の必要性が高まってきている。

そこで本論文は、任意形状に適した四面体要素に基づく安定化有限要素法における Smagorinsky モデル¹⁾の有効性を検証することを目的とするものである。数値解析例には、Channel 流れ問題を扱い、Smagorinsky 定数と有限要素分割の解像度の影響について、スペクトル法による DNS²⁾との比較のもとで検討を行った。

2. 支配方程式

非定常・非圧縮・粘性流体の流れは、非圧縮 Navier-Stokes 方程式、連続式によって支配されている。これらに対してフィルター操作を施すことにより LES の支配方程式が導出される。LES の支配方程式は (1), (2) 式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2(\nu_e + \nu) \bar{D}_{ij} \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (2)$$

ここで、 \bar{u}_i は i 方向の流速の GS 成分、 f_i は i 方向の物体力、 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性係数である。 P は総圧、 \bar{D}_{ij} は変形速度テンソルであり、それぞれ (3), (4) 式で表される。

$$P = \bar{p} + \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k} \quad (3)$$

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

ここで、 \bar{p} は圧力の GS 成分、 u'_i は流速の SGS 成分である。 ν_e は Smagorinsky モデルに基づく SGS 渦粘性係数であり、(5) 式で表される。

$$\nu_e = (C_s f_s \Delta)^2 |\bar{D}| \quad (5)$$

ここで、 C_s は、Smagorinsky 定数である。 Δ 、 $|\bar{D}|$ はそれぞれ (6), (7) 式で与えられる。

$$\Delta = V_e^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

$$|\bar{D}| = \sqrt{2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}} \quad (7)$$

KeyWords: 安定化有限要素法, 四面体要素, LES

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d31202@educ.kc.chuo-u.ac.jp

表-1 数値解析条件

初期条件	DNS データベース ²⁾ に乱数を付加した値
境界条件	x, z 方向: 周期境界条件 y 方向: Non-slip 条件
有限要素分割 ($x \times y \times z$)	$32 \times 40 \times 32$ 分割 $64 \times 40 \times 64$ 分割
有限要素分割幅 ($\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$)	$30, 1 \sim 14, 15$ $15, 1 \sim 14, 7.5$
Reynolds 数	150
微小時間増分量	5.0×10^{-5}
連立 1 次方程式の解法	Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法

表-2 Smagorinsky 定数

有限要素分割	Smagorinsky 定数
$32 \times 40 \times 32$	0.00, 0.10, 0.15, 0.20
$64 \times 40 \times 64$	0.00

ここで、 V_e は四面体要素の体積である。 f_s は Van Driest 関数であり、SGS 渦粘性係数が壁面近傍で緩やかに 0 に漸近するように補正するものである。 f_s は (8) 式で与えられる。

$$f_s = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right), \quad A^+ = 25, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (8)$$

ここで、 y^+ は壁座標、 y は壁面からの距離、 u_τ は壁面摩擦速度である。

本論文では (1), (2) 式に SUPG/PSPG 法³⁾に基づく安定化有限要素法を適用し、P1/P1 要素 (流速・圧力 1 次補間四面体要素) を用いて空間方向に離散化し、有限要素方程式を得た。時間方向の離散化については、移流速度に 2 次精度 Adams-Bashforth 法、移流速度以外の流速に Crank-Nicolson 法 (2 次精度) を用い、圧力項、連続式を陰的に扱った。

3. 数値解析例

(1) 解析条件

数値解析例として、 2δ の流路幅を有する Channel 流れ問題⁴⁾を扱った。この解析例では、すべての物理量が無次元であるため、支配方程式を δ, u_τ, ρ で無次元化して数値解析を行った。流れを保持するために (1) 式において $f_1 = 1.0$ を外力項として与えた。数値解析条件を表-1, 2 に、解析領域を図-1 に示した。本論文では、大規模計算に対して有効な、領域分割法に基づく並列計算法を採用した。領域分割数を 16、 x 方向に 8 等分割、 z 方向に 2 等分割とした。通信ライブラリーには MPI を用いた。

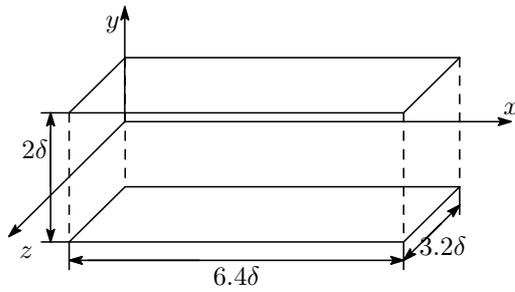


図-1 解析領域

計算は、表-1 に示した初期条件で無次元時間 40 まで計算し、無次元時間 0 ~ 40 での平均流速、乱流強度を初期条件としてさらに無次元時間で 40、計 80 計算した。

(2) 解析結果

図-2(a), (b) に無次元時間 40 ~ 80 の平均流速図を、図-3(a), (b) に無次元時間 40 ~ 80 の乱流強度図を示した。図(a) は有限要素分割が $32 \times 40 \times 32$ 分割での Smagorinsky 定数の違いによる比較を、図(b) は $C_s = 0.0$ での有限要素分割の違いによる比較を示した。

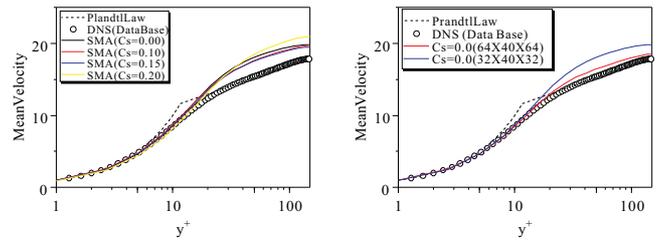
図-2(a) では、 $C_s = 0.0$ と比較して、 $C_s = 0.20$ において平均流速を過大評価してしまったが、それ以外のケースにおいてはややスペクトル法による DNS に近い結果となった。しかし、図-3(a) では、すべてのケースにおいて $C_s = 0.0$ よりも精度が落ちてしまった。 $C_s = 0.20$ で流速を過大評価してしまったのは、粘性が過剰に働いたために、流れが層流に近い状態になったためであると考えられる。 $C_s = 0.10, 0.15$ では平均流速、乱流強度共に定性的にはよく評価できていると考えられる。全てのケースにおいて平均流速、主流方向の乱流強度を過大評価、主流方向以外の乱流強度を過小評価した原因は格子解像度が不足しているために、エネルギー、非等方性が大きくなってしまったためであると考えられる。

図-2(b) では、有限要素分割が $32 \times 40 \times 32$ 分割に比べ $64 \times 40 \times 64$ 分割の方が、スペクトル法における DNS に近い値となった。同様に、図-3(b) でも全方向の乱流強度において、 $64 \times 40 \times 64$ 分割の方が、スペクトル法における DNS に近い値となった。 $64 \times 40 \times 64$ 分割では格子解像度が不足した場合に生じる平均流速、主流方向の乱流強度の過大評価、主流方向以外の乱流強度の過小評価が抑えられているため、 $32 \times 40 \times 32$ 分割では格子解像度が十分ではないと考えられる。

図-2(a), 図-3(a) より、平均流速については Smagorinsky モデルの有効性を示すことができたが、乱流強度については有効性を示すことはできなかった。Smagorinsky 定数については、 $C_s = 0.20$ と比較して、 $C_s = 0.10, 0.15$ の方が Channel 流れ問題においては適当であると考えられる。図-2(b), 図-3(b) より、 $32 \times 40 \times 32$ 分割では格子解像度が十分ではないと考えられる。

4. おわりに

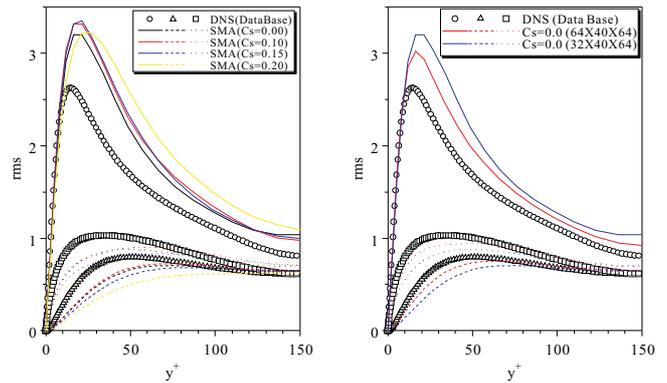
本論文は、任意形状に適した四面体要素に基づく安定化有限要素法における Smagorinsky モデルの有効性を検証す



(a) C_s による比較

(b) 分割数による比較

図-2 平均流速図



(a) C_s による比較

(b) 分割数による比較

図-3 乱流強度図

ることを目的とした。数値解析例には、Channel 流れ問題を扱い、Smagorinsky 定数と有限要素分割の解像度の影響について、スペクトル法による DNS との比較のもとで検討を行った。その結果以下の結論を得た。

- Smagorinsky 定数については、 $C_s = 0.20$ と比較して、 $C_s = 0.10, 0.15$ の方が Channel 流れ問題において適当であると考えられる。
- $32 \times 40 \times 32$ 分割では平均流速については有効性を示すことができたが、乱流強度については有効性を示すことはできなかった。この原因としては、 $32 \times 40 \times 32$ 分割では格子解像度が十分ではないためであると考えられる。

今後の課題として、Smagorinsky モデルを用いた数値解析を格子解像度を上げて行うとともに、Smagorinsky モデル以外の LES 乱流モデルを導入することが挙げられる。

参考文献

- 1) J. Smagorinsky: General circulation experiments with the primitive equation I. the basic experiment, Monthly Weather Review, 91, pp.99-164, 1963.
- 2) K.Iwamoto, Y.Suzuki and N.Kasagi: Reynolds number effect on wall turbulence, International Journal of Numerical Method for Heat and Fluid Flow, 23, pp.678-689, 2002.
- 3) Tayfun E. Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1992.
- 4) J.Kim, P.Moin and R.Moser: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, Journal of Fluid Mechanics, 177, pp133-166, 1987.