

# 均質化法に基づく多孔質媒体内における浸透流解析

中央大学 学生員 中村 慎也  
 中央大学 学生員 久保田 聖  
 中央大学 正会員 櫻山 和男

## 1. はじめに

地下環境における土壌汚染や地震時における液状化現象の把握，軟弱地盤，斜面，ダム等の地盤構造物における計画・設計等を行なう場合，地下水の挙動を定量的に評価することが重要となる．浸透流解析において用いられる透水係数は，間隙の形状や大きさ及び地盤中に占める割合など微視的構造の影響が大きいため，透水係数の決定は困難となる場合が多い．近年，浸透流解析の手法の一つに内部微視的構造を考慮できる均質化法が挙げられ，その有効性が示されている．

そこで本研究では，多孔質媒体内の流れを非圧縮ストークス流れと仮定した均質化法に基づく浸透流解析手法<sup>1)2)</sup>を導入し，浸透流現象をマイクロレベルから把握することを目的とする．また，流れ場を高精度かつ安定に解くためにPSPG法に基づく安定化有限要素法<sup>3)</sup>を適用した．数値解析例として，砂質土における単純な浸透現象問題を取り上げ，得られた均質化された透水係数と他の解析結果や実験結果<sup>1)</sup>との比較を行い，本手法の有効性について検討した．

## 2. 均質化法に基づく有限要素法

### (1) 基礎方程式

多孔質物体内部の流速は一般的に遅いので，非圧縮 Stokes 流れを仮定すると，基礎方程式は以下に示す運動方程式，連続式で表される．

$$-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_j} + \rho X_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで， $V_i$  は流速， $P$  は圧力， $\mu$  は粘性係数， $\rho$  は水の密度， $X_i$  は物体力を示す．また，境界条件は次のように与えられる．

$$V_i = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i = \bar{V}_i \\ P_i = \bar{P}_i \end{array} \right. \quad \text{on } \Gamma_F \quad (4)$$

ここで  $\Gamma$  は固液境界， $\Gamma_F$  は流体部における外部境界を示し， $\bar{V}_i$ ， $\bar{P}_i$  はそれぞれ流速と圧力の境界で既定されている値を表す．

### (2) 均質化法の導入

微視的構造を考慮した解析を行うために，均質化法<sup>2)</sup>を導入する．図-1に均質化法の概略図を示す．ここで，巨視的構造の位置を表す全体座標系  $X(x_1, x_2)$  とは別に，周期的に配置されている微視的構造内部の位置を表す座標系  $Y(y_1, y_2)$  を導入する．互いに独立した座標系である巨視的

座標系  $x$  と微視的座標系  $y$  との関係は，異なるスケールで定義されているため，微視的構造の基本周期領域のスケール比  $\varepsilon$  を用いて，式(5)に表される．

$$x_i = \varepsilon y_i \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

それぞれの座標系における流速  $V_i^\varepsilon(x, y)$  と圧力  $P^\varepsilon(x, y)$  はスケール比  $\varepsilon$  を用いて式(6),(7)のように表すことができる．

$$V_i^\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 V_i^0(x, y) + \varepsilon^3 V_i^1(x, y) + \varepsilon^4 V_i^2(x, y) + \dots + \varepsilon^n V_i^n(x, y) \quad (6)$$

$$P^\varepsilon(x, y) = P^0(x, y) + \varepsilon P^1(x, y) + \varepsilon^2 P^2(x, y) + \dots + \varepsilon^n P^n(x, y) \quad (7)$$

ここで，添え字の  $\varepsilon$  は微視的構造への依存性を示す．以上の式を用いて，微視的構造，巨視的構造の支配方程式を求めると以下のように表せる．

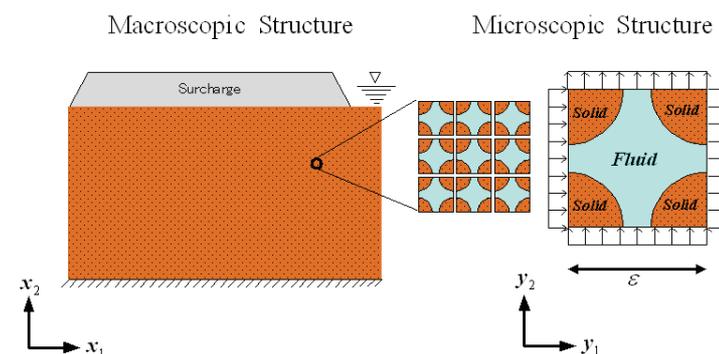


図-1 均質化法の概略図

### 微視的方程式

$$\int_{Y_F} \phi^* \left\{ -\frac{\partial p^k}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial v_i^k}{\partial y_j} \right) + \delta_{ik} \right\} dy = 0 \quad (8)$$

$$\int_{Y_F} \psi^* \frac{\partial v_i^k}{\partial y_i} dy = 0 \quad (9)$$

$$v_i^k = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_i^k(x, y) = v_i^k(x, y + Y) \\ p^k(x, y) = p^k(x, y + Y) \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (11)$$

ここで， $v_i^k, p^k$  はそれぞれ流速特性関数，圧力特性関数であり，式(8)-(11)が微視的方程式となる．

KeyWords： 均質化法，多孔質体，透水係数

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: nakamura\_s@civil.chuo-u.ac.jp

表 - 1 各 Case の有限要素分割

	微視的構造	分割数	分割幅 (cm)
Case1	1次元	20 × 20(全領域)	0.006750
Case2	1次元	40 × 40(全領域)	0.003375
Case3	1次元	100 × 100(全領域)	0.001350
Case4	2次元	20 × 20(全領域)	0.006750
Case5	2次元	40 × 40(全領域)	0.003375
Case6	2次元	100 × 100(全領域)	0.001350

巨視的方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_i^0}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{Y_F} V_i^0 dy \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \rho X_i^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_i} \right) \frac{1}{|Y|} \int_{Y_F} v_j^i dy \right\} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \frac{\partial P^0}{\partial x_i} - \rho X_i^0 \right) \right\} K_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i^0 &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_F} V_i^0 dy = \left( \rho X_i^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_i} \right) K_{ij} \\ K_{ij} &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_F} v_j^i dy \end{aligned}$$

ここで  $\tilde{V}_i^0$ ,  $K_{ij}$  は巨視平均流速, 均質化透水係数を表す.

(3) 安定化有限要素法

均質化法を導入したことにより得られた微視方程式 (8), (9) に対して, 安定化有限要素法 (PSPG 法) を適用すると, 以下の弱形式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{Y_F} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial y_i} p \delta_{ij} dY_F + \mu \int_{Y_F} \frac{\partial \phi^*}{\partial y_j} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY_F + \int_{Y_F} \psi^* \frac{\partial v_i}{\partial y_i} dY_F \\ + \sum_{e=1}^{nel} \int_{Y_{Fe}} \tau_{pspg} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} p \delta_{ij} \right) dY_{Fe} \\ - \tau_{pspg} \int_{Y_{Fe}} \frac{\partial \psi^*}{\partial y_i} \delta_{ik} dY_{Fe} \\ = \delta_{ik} \int_{Y_F} \phi^* dY_F \end{aligned} \quad (13)$$

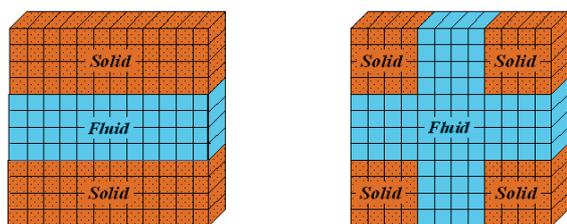
ここで, 安定化パラメータ  $\tau_{pspg}$  は以下のように定義される.

$$\tau_{pspg} = \left( \frac{4\nu}{h_e^2} \right)^{-1} \quad (14)$$

ここで,  $\nu$  は動粘性係数,  $h_e$  は要素サイズを表す.

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために, 本手法を多孔質媒体内における浸透流解析に適用し, 他の解析結果や実験値<sup>1)</sup>との比較を行なった. 微視的構造を図 - 2 に示す. 微視的構造の間隙比は全体の領域は変えずに流体領域のみ増やしていくことで変化させている. 解析条件として微視サイズは  $0.135\text{cm} \times 0.135\text{cm}$ , 水の粘性係数は  $\mu = 1.2 \times 10^{-2}\text{cm} \cdot \text{s}$  を用いている. また, 本解析での各 Case の詳細は表 - 1 に示す.



A-1 次元流れ

B-2 次元流れ

図 - 2 微視的構造

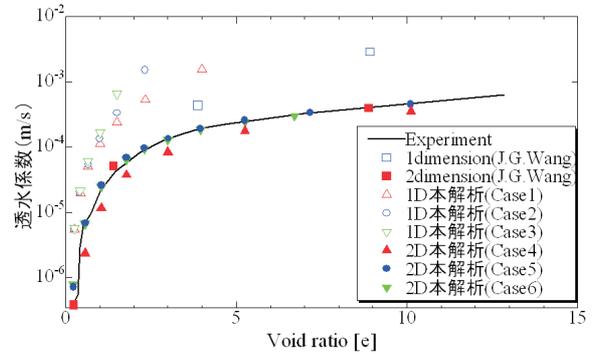


図 - 3 透水係数と間隙比

図 - 3 に各 Case の間隙比と透水係数の関係を示す. 図から間隙 (流体部) の割合が多くなるにつれて透水係数が大きくなっていく傾向が捉えられていることがわかる. しかし, 1次元モデルでは実験値との差異が大きく見られる. これに対し2次元モデルでは1次元モデルに比べ差異が少なく, 定量的にも実験値と良い一致を示している. このことから, 微視構造の違いが巨視解析で用いる物性値に与える影響を確認でき, 微視的構造の正確なモデリングが重要であると考えられる.

4. 結論

本研究では, 均質化法を浸透流解析に適用し, ミクロレベルの視点でのアプローチから本解析で得られた均質化透水係数と実験値や他の解析結果との比較により, 以下の結論を得た.

本手法より得られた均質化透水係数と他の解析結果や実験値との比較により, 間隙比と透水係数の関係において定性的に良い一致を示した. 2次元モデルにおいては, 各 Case とも実験値と定性的かつ定量的にも良い一致を示し, 本手法の有効性を示すことができた.

今後の課題として, より多くのケースを検討して本手法の有効性を確立するとともに, 本手法で得られた物性値を他の解析にも適応して解析を行っていきたいと考えている.

参考文献

- 1) J.G.Wang, C.F.Leung: Numerical solutions for flow in porous media, Int.J.Numer.Anal. Meth.Geomech.2003
- 2) 早川 真, 清水隆文, 市川康明: 均質化法による粘土の浸透解析と圧密挙動に関する研究, 土木学会大 54 回年次学術講演会 - A195, pp390 - 391
- 3) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44,1991