

格子ボルツマン法による圧縮性熱流体解析

中央大学 学生員 松下 裕生
中央大学大学院 学生員 立石 絢也
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method)^{1) 2)} は、混相流や多孔質内流れなどの複雑な流れの解析に有効な手法であり、熱流体の解析にも拡張されている。熱流体解析において非圧縮とみなせる程度に Mach 数が小さい場合は非熱流体モデル²⁾ を用いることも可能であるが、実際の熱流体現象は、圧縮性を伴うものが多い。

そこで、本報告では、格子ボルツマン法に基づく圧縮性熱流体の解析に Multi-speed 型熱流体モデル^{3) 4)} を用いる方法に着目し、その有効性に関する検討を行った。Multi-speed 型熱流体モデルは、複数の大きさの速度の粒子をもちエネルギー保存を考慮しているため、流体の熱移動、圧縮性を評価することができる。格子気体モデルとしては、近年よく用いられる正方格子をもつモデルとして 2 次元 29 速度モデル⁴⁾ を採用した。解析例として衝撃波管内流れを取り上げて、Multi-speed 型熱流体格子 BGK モデルの熱移動、圧縮性に対する精度と適用限界に関する検討を行った。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法

格子点上の粒子の運動は、座標 x 、時刻 t において以下の格子ボルツマン方程式によって表される。

$$f_{nki}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{nki}\Delta t, t + \Delta t) - f_{nki}(\mathbf{x}, t) = \Omega_{nki}[f_{nki}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

粒子分布関数 $f_{nki}(\mathbf{x}, t)$ は、速度の大きさが k で i の方向へ向かう粒子がどれくらい存在するかを表したものである。また、 $n=0$ は静止粒子、 $n=1$ は鉛直、水平方向へ移動する粒子、 $n=2$ は対角線方向へ移動する粒子を表す。 $\Omega_{nki}[f_{nki}(\mathbf{x}, t)]$ は衝突を表す項であり、本報告では、格子ボルツマン法の解析において一般によく用いられる格子 BGK モデルを採用した。

格子気体モデルとしては、渡利らの提案した 2 次元 29 速度モデルを用いた。(図-1)

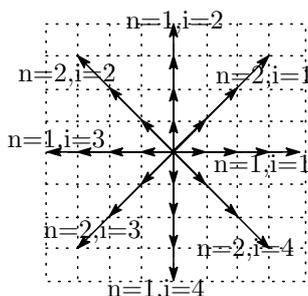


図-1 2次元 29 速度モデル

(2) Multi-speed 型熱流体格子 BGK モデル

Multi-speed 型熱流体モデルは、質量保存、運動量保存だけでなく運動エネルギー保存も考慮しているため、流体の圧縮性も評価できる。格子 BGK モデルを用いると格子ボルツマン方程式の衝突項は、次式で表される。

$$\Omega_{nki}[f_{nki}(\mathbf{x}, t)] = \frac{1}{\tau} [f_{nki}^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_{nki}(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

このモデルは、粒子分布は衝突を繰り返すことによって局所的に一定の割合で平衡状態に向かって緩和するという考えに基づいている。局所平衡分布関数 $f_{nki}^{eq}(\mathbf{x}, t)$ は、平衡状態の粒子分布を表す関数である。また、単一時間緩和係数 τ の逆数は、粒子分布の非平衡量の減少割合を示す。

(3) 局所平衡分布関数

2次元 Multi-speed 型熱流体モデルの局所平衡分布関数は、局所的な密度 ρ 、流速 u および内部エネルギー e によって決定され次式で表される。

$$f_{nki}^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho F_{nk} \left[\left(1 - \frac{u^2}{2e} + \frac{u^4}{8e^2}\right) + \frac{1}{e} \left(1 - \frac{u^2}{2e}\right) c_{ki\xi} u_\xi \right. \\ \left. + \frac{1}{2e^2} \left(1 - \frac{u^2}{2e}\right) c_{ki\xi} c_{kij} u_\xi u_\eta \right. \\ \left. + \frac{1}{6e^3} c_{ki\xi} c_{kij} c_{kiz} u_\xi u_\eta u_\zeta \right. \\ \left. + \frac{1}{24e^4} c_{ki\xi} c_{kij} c_{kiz} c_{kix} u_\xi u_\eta u_\zeta u_\chi \right] \quad (3)$$

ここで c は各方向への速度ベクトルである。また、2次元 29 速度モデルでは、重み係数 F_{nk} の値はそれぞれ以下のようになる。

$$F_{11} = \frac{1}{60} (-24e^4 + 85e^3 - 106e^2 + 48e) \quad (4)$$

$$F_{12} = \frac{1}{240} (24e^4 - 80e^3 + 89e^2 - 24e) \quad (5)$$

$$F_{13} = \frac{1}{11340} (-264e^4 + 735e^3 - 574e^2 + 144e) \quad (6)$$

$$F_{14} = \frac{1}{13440} (36e^4 - 70e^3 + 49e^2 - 12e) \quad (7)$$

$$F_{21} = \frac{1}{32} (4e^4 - 13e^3 + 12e^2) \quad (8)$$

$$F_{22} = \frac{1}{320} (-4e^4 + 10e^3 - 3e^2) \quad (9)$$

$$F_{23} = \frac{1}{12960} (12e^4 - 15e^3 + 4e^2) \quad (10)$$

$$F_{00} = 1 - 4(F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14} \\ + F_{21} + F_{22} + F_{23}) \quad (11)$$

(4) 流れの巨視的変数

流れの巨視的な密度 ρ 、流速 u 、圧力 p 、内部エネルギー e はそれぞれ以下のように定義される。また、温度 T は内部

KeyWords: 格子ボルツマン法, 圧縮性熱流体, 格子 BGK モデル

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d31330@educ.kc.chuo-u.ac.jp

エネルギーを気体定数 R で除したものと与えられる。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{nki} f_{nki} \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{nki} f_{nki} \mathbf{c}_{nki} \quad (13)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho u^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{nki} f_{nki} c_{nk}^2 \quad (14)$$

$$e(\mathbf{x}, t) = \frac{p}{\rho} \quad (15)$$

3. 数値解析例

(1) 衝撃波管内流れ

2次元 29 速度モデルの熱移動、圧縮性に対する精度の検証のため、解析例として衝撃波管内流れを取り上げた。解析領域及び境界条件は図-2 に示す。高圧部と低圧部に圧力差を与え、仕切り板をはずしたときの膨張波と衝撃波の挙動を理論解と比較をした。また、単一時間緩和係数は、0.8 とし、衝撃波進行方向の格子分割数は 10,000、進行横断方向の格子分割数は 6 とした。



図-2 衝撃波管内流れ解析条件図

Mach 数が 1.035, 1.341, 1.425 のときの密度、圧力、流速、内部エネルギーをそれぞれ図-3~6 に示す。

Mach 数が 1.035 のときの解析結果は、密度、圧力、流速、内部エネルギーにおいて理論解とよい一致を示した。しかし、Mach 数を大きくすると、振動や減衰が見られ、その傾向は流速と内部エネルギーにおいてより顕著であった。また、Mach 数 1.425 では、1500 ステップで計算が破綻し、さらに Mach 数を大きくすると計算の破綻は速まった。格子 BGK モデルでは、局所平衡分布関数を用いるため、強い非平衡状態が生じる現象では、分布関数が現象に対応できなくなるため、取り扱うことができる衝撃波 Mach 数の大きさには限界があると考えられる。

4. おわりに

本報告では、格子ボルツマン法に基づく圧縮性熱流体の解析に Multi-speed 型熱流体モデルを用いる方法に着目し、その精度と適用限界に関する検討を行った。解析例として、衝撃波管内流れを取り上げて以下の結論を得た。

- Multi-speed 型熱流体モデルが、流体の熱移動と圧縮性をおおむね正しく評価できることが確認できた。
- 2次元 29 速度モデルを用いての解析において、扱うことができる Mach 数の限界は 1.4 程度であることがわかった。

今後の課題としては、Multi-speed 型モデルと Multi-component 型モデルの比較、外力の導入、3次元への拡張などが挙げられる。

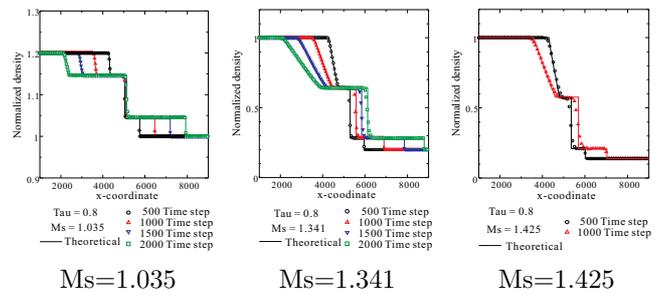


図-3 x 軸方向の密度

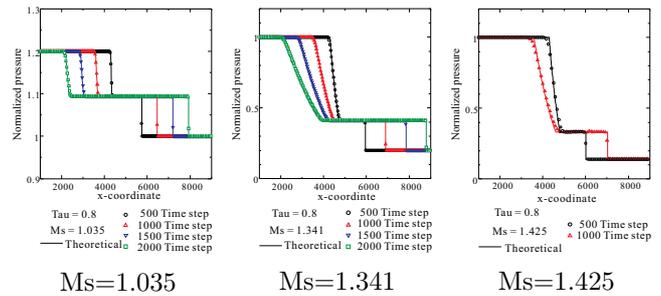


図-4 x 軸方向の圧力

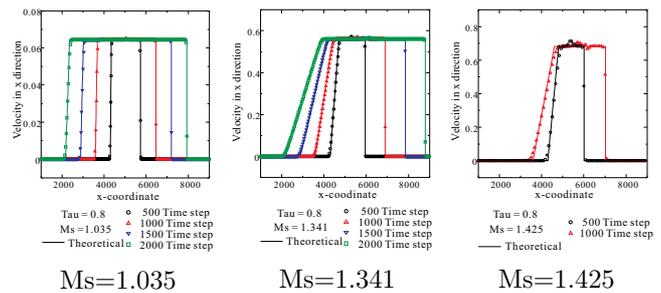


図-5 x 軸方向の流速

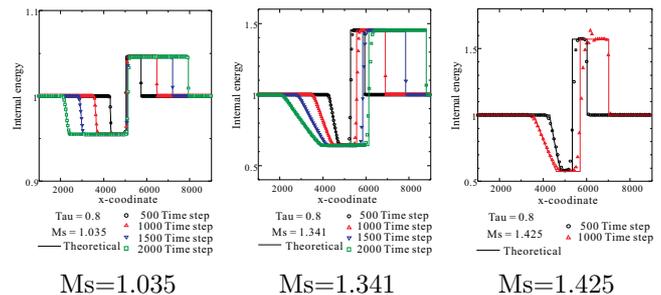


図-6 x 軸方向の内部エネルギー

参考文献

- 1) 稲室: 格子ボルツマン法, 物性研究, 77-2, pp.197-232, 2001-11.
- 2) 薦原, 高田, 片岡: 格子気体法 格子ボルツマン法, コロナ社, pp.99-127, 1994.
- 3) M.Watari and M.Tsutahara: Two-dimensional thermal model of the finite difference lattice Boltzmann method with high spatial isotropy, Phys.Rev.E67,036306, 2003.
- 4) 渡利, 薦原: 多速型熱流体格子ボルツマンモデルを使った Couette 流および垂直衝撃波シミュレーション, 日本機械学会 16 回計算力学講演会講演論文集, pp.143-144, 2003-11.