

CIVA-CUP 法による自由表面流れ解析

中央大学 学生員 ○ 宮田 篤史
中央大学大学院 学生員 加藤 和範
中央大学大学院 学生員 弘崎 聡
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

自由表面流れ問題において、波浪衝撃の瞬間や巻き込み渦が発生する際には、空気の圧縮性が重要となるため、その数値解析には圧縮性の考慮が必要不可欠である。近年、流体の圧縮性を考慮した数値解析手法は数多く提案されているが、その中でも、CIP 法¹⁾に基づく C-CUP 法²⁾は、圧縮・非圧縮流体が統一的に扱える解法であり、有効な手法として考えられる。しかし、CIP 法は通常構造格子を用いるため、複雑形状への適応を考えると限界がある。

本論文は、CIP 法を非構造格子に対して適用可能とした CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates) 法³⁾を用いた CIVA-CUP 法による自由表面流れ解析手法を提案するものである。数値解析例として、衝撃波管問題および正方形 Cavity 内強制対流問題を取り上げ、厳密解および実験値の比較を行い、本手法の有効性の検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

本手法における支配方程式は、連続式、Navier-Stokes 方程式、エネルギー方程式で以下のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

ここに $\rho, \mathbf{u}, p, \mu, c, \mathbf{f}$ はそれぞれ密度、流速、圧力、粘性係数、音速、物体力である。

自由表面位置を決定するための手法として VOF 法を用い、自由表面位置は、次式の移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = -\phi \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

ここに、 ϕ は VOF 関数を表し、液体であれば 1、気体であれば 0、自由表面上であれば 0.5 となる。なお、各節点における気体、液体の音速と粘性係数は、計算された VOF 関数を用いて次式のように決定できる。

$$c^2 = c_{Li}^2 \phi + c_{Ga}^2 (1 - \phi) \quad (5)$$

$$\mu = \mu_{Li} \phi + \mu_{Ga} (1 - \phi) \quad (6)$$

ここに、 $c_{Li}, c_{Ga}, \mu_{Li}, \mu_{Ga}$ はそれぞれ液体、気体の音速および粘性係数である。

(2) CIVA-CUP 法による定式化

CIVA-CUP 法では、支配方程式を移流相と非移流相に分けて計算する。移流相に関しては、次式のように表される。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^*}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (10)$$

また、非移流相は、C-CUP 法²⁾に基づき、次式のように表される。

$$\rho^* = \rho^n + \frac{1}{c^2} (p^* - p^n) \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho^n} \{ \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \} + \mathbf{f}^n \quad (12)$$

$$\nabla \frac{\nabla p^*}{\rho^n} = \frac{p^* - p^n}{\rho^n c^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (13)$$

$$\phi^* = \phi^n + \frac{\phi}{\rho^n c^2} (p^* - p^n) \quad (14)$$

ここで、上添え字 $n, *, n+1$ は時間ステップを表す。非移流相の計算には、すべて Galerkin 法に基づく有限要素法を用いた。また、連立一次方程式の解法には、Element by Element 法に基づく Bi-CGSTAB 法を用いた。

移流相の解法には、CIP 法¹⁾を三角形要素へ拡張した CIVA 法³⁾を用いる。計算方法は、移流方程式の厳密解である式 (15) を用いて、 $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ の解を上流点での $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t, t - \Delta t)$ で近似し、上流側要素における式 (16) に示す完全 3 次多項式により補間する。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t) \quad (15)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} \left(L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \quad (16)$$

$$\alpha_i = \phi_i \quad (17)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla \phi_j \quad (18)$$

ここに、 (L_i) は、要素内の面積座標であり、 d は調節パラメータで $d=0$ のとき 1 次補間、 $d=1$ のとき 3 次補間となる。

KeyWords: 自由表面, CIVA 法, CIVA-CUP 法

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: d31326@kc.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析

(1) 衝撃波管問題

本手法の圧縮性流体への有効性を検討するために衝撃波管問題を行った．初期条件と解析モデルは図 - 1 に示す．音速は $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ とし，比熱比 γ は 1.4 とする．また，境界条件は slip 条件とし，格子幅 $\Delta x = 0.01$ ，微小時間増分量 $\Delta t = 0.005$ とした．

図 - 2, 図 - 3, 図 - 4 にそれぞれ密度，圧力，流速分布結果を示す．衝撃波の部分の先端で厳密解と比較して位相の遅れが生じているが，密度，圧力，流速分布ともに厳密解と比較して定性的に良い一致を示している．

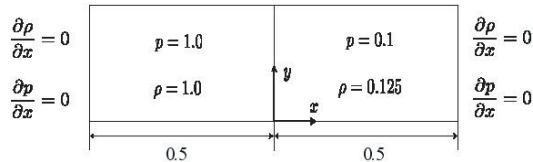


図 - 1 解析モデル

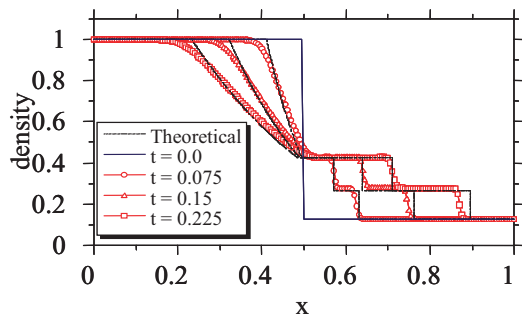


図 - 2 密度分布時刻歴

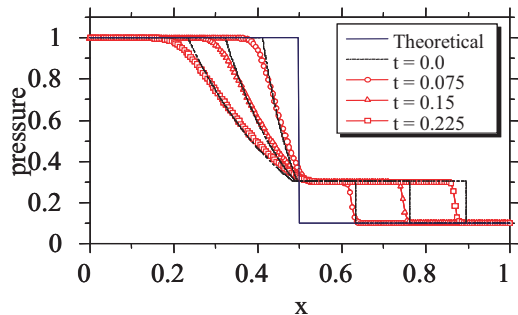


図 - 3 圧力分布時刻歴

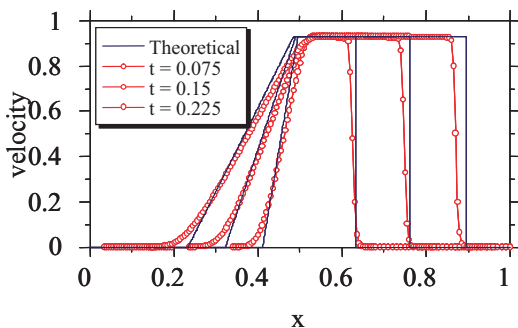


図 - 4 流速分布時刻歴

(2) 正方形 Cavity 内強制対流問題

次に，本手法の非圧縮性流体に対する有効性を検討するために 2 次元 Cavity 内強制対流問題を行った．境界条件と有限要素分割図を図 - 5 に示す．微小時間増分量は $\Delta t = 0.001$ とした．

図 - 6 図 - 7 に， $Re = 10^2, 10^3$ に流速における中心軸上での流速分布図を示す．Ghia らとの結果⁴⁾を比較して良い一致を示している．

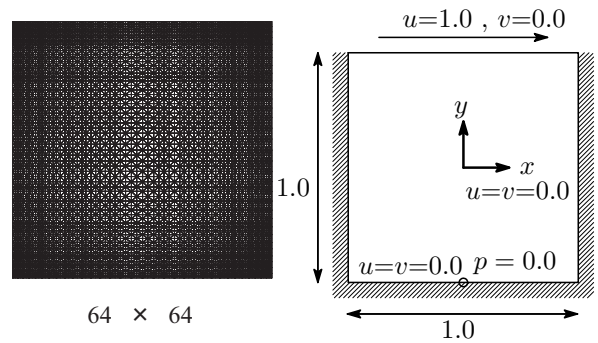


図 - 5 有限要素分割図と解析条件

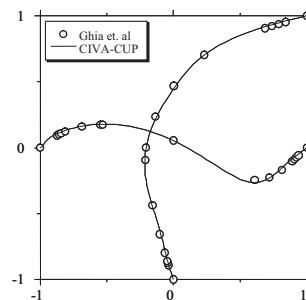


図 - 6 $Re = 100$

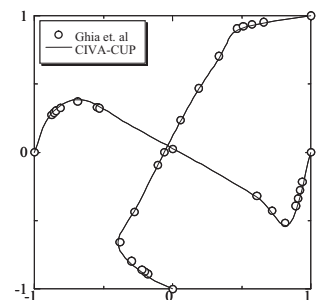


図 - 7 $Re = 1000$

4. おわりに

本論文は，C-CUP 法を非構造格子に対し適用可能とした CIVA-CUP 法による自由表面流れ解析の構築を行った．数値解析例として衝撃波管問題，正方 Cavity 内強制対流問題を取り上げ，本手法の有効性を検討し以下の結論を得た．

- 衝撃波管問題において，本手法による解析結果は，厳密解とほぼ一致し，圧縮性流体に対する解法の有効性を確認できた．
- 正方 Cavity 内強制対流問題において本手法による解析結果は，Ghia らとの結果と比較して良い一致を示し，非圧縮性流体に対する本手法の有効性を確認できた．

今後の課題としては，実現象への拡張として，様々な自由表面流れ解析に適用する予定である．

参考文献

- 1) Yabe, T. and Aoki, T. : 'A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial intrpolation', *Comput. Phys. Commun.*, 66, pp.219-242, 1991.
- 2) Yabe, T., Wang, P.Y.: 'Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid,' *J. Phys. Soc. Japan*, 60-7, pp.2105-2108, 1991.
- 3) 田中伸厚: '数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発', 日本機械学会論文集 (B 編), 64 巻 620 号, 1998.
- 4) U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin: High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method, *J. Fluid Mech.*, 136, pp.321-374, 1983.