

可動堰を用いた水位の最適制御

Optimal Control of Water Elevation Using Movable Weir

○ 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 学生会員 鈴木 孝洋¹
中央大学教授 理工学部土木工学科 正会員 川原 睦人²

要旨：この論文では、最適制御理論と有限要素法に基づいた可動堰の操作による洪水制御問題を取り上げる。この問題を取り扱うために、基礎方程式として非線形浅水長波方程式を用い、また目的値を得るための制御量を計算するために最適制御理論を用いる。最小化手法としては Sakawa-Shindo 法を適用し、空間方向の離散化として安定化気泡関数要素に基づいた有限要素法を適用する。

1. はじめに

堰の主な目的は灌漑である。しかしながら、可動堰では流量を制御することができる。そこで比較的小さな洪水に対して、可動堰を調節することにより流量をコントロールし、安定した安全な水位を保つことを目的とする。さらに堰の上流と下流の影響も考えてこの制御を行う。

次式のように定義される。

$$u_* = \frac{gn^2 \sqrt{u_k u_k}}{\xi^{1/3}}$$

ここで n はマンニングの粗度係数である。

2. 基礎方程式

基礎方程式として非線形浅水長波方程式を用いる。

< 運動方程式 >

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g(\xi + \eta)_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_j + fu_i = 0,$$

< 連続式 >

$$\dot{\xi} + \xi_{,i} u_i + \xi u_{i,i} = 0,$$

ここで u は流速、 ξ は水位、 η は河床高さ、 g は重力加速度、 ν と f は渦動粘性係数と河床摩擦であり、次のように表される。また摩擦速度 u_* を用いて渦動粘性係数 ν および運動方程式中の f を表すと次式のようになる。

$$\nu = \frac{k_1}{6} u_* \xi, \quad f = \frac{u_*}{\xi}$$

ここで k_1 はカルマン定数であり、摩擦速度 u_* は

3. 有限要素方程式

気泡関数要素に基づいた有限要素方程式は次のように示される。

< 運動方程式 >

$$M\dot{u}_i + \bar{u}_j S_j u_i + g S_i (\xi + \eta) + \nu H_{jj} u_i + \nu H_{ji} u_j + f M u_i = 0,$$

< 連続式 >

$$M\dot{\xi} + \bar{u}_i S_i \xi + \bar{\xi} S_i u_i = 0.$$

4. 最適制御理論

4. 1. 評価関数

最適制御は評価関数を最小にする最適な値を見つけるものとして定義される。評価関数は次のように定義される。

キーワード：有限要素法、最適制御理論、浅水長波方程式、安定化気泡関数、Sakawa-Shindo 法

1 東京都文京区春日 1-13-27 (E-mail:takahiro@kc.chuo-u.ac.jp)

2 東京都文京区春日 1-13-27 (E-mail:kawa@kc.chuo-u.ac.jp)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{(\xi_u - \xi_{opt})^T P (\xi_u - \xi_{opt})\} dt \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{(\xi_d - \xi_{opt})^T Q (\xi_d - \xi_{opt})\} dt$$

ここで ξ_{opt} は目的水位, ξ_u と ξ_d は上流と下流での観測点での計算された水位を表している. また, P, Q は重み定数行列である.

4.2. 随伴方程式

拘束条件付きの評価関数の最小化問題に対してラグランジュ乗数法を適用する. 状態方程式の有限要素方程式とラグランジュ乗数によって評価関数は拡張される. 拡張評価関数は次式のように示される.

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} \{H - \lambda_{u_i}^T M \dot{u}_i - \lambda_{\xi}^T M \dot{\xi}\} dt,$$

ここで λ_{u_i} と λ_{ξ} はそれぞれ流速と水位に対するラグランジュ乗数である. また H はハミルトニアンで, 次式のように表される.

$$H = \frac{1}{2} (\xi_u - \xi_{opt})^T P (\xi_u - \xi_{opt}) + \frac{1}{2} (\xi_d - \xi_{opt})^T Q (\xi_d - \xi_{opt})$$

$$+ \lambda_{u_i}^T \{-\bar{u}_j S_j u_i - g S_1 (\xi + \eta) - v H_{ji} u_i - v H_{ji} u_j - f M u_i\}$$

$$+ \lambda_{\xi}^T \{-\bar{u}_i S_i \xi - \bar{\xi} S_i u_i\}.$$

拡張評価関数の第一変分をとり, 拡張評価関数の最小値を求める. $\delta J^* = 0$ により求められた随伴方程式と終端条件は次のように示される.

< 随伴方程式 >

$$M \dot{\lambda}_{u_i} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, M \dot{\lambda}_{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

< 終端条件 >

$$\lambda_{u_i}(t_f) = 0, \lambda_{\xi}(t_f) = 0.$$

3. 数値解析

3.1. 解析モデル

解析領域として長さ 235 (m), 幅 9 (m) の有限要素メッシュを用います. 図 2 で表されるようなモデルを用いて可動堰による水位の制御を行う

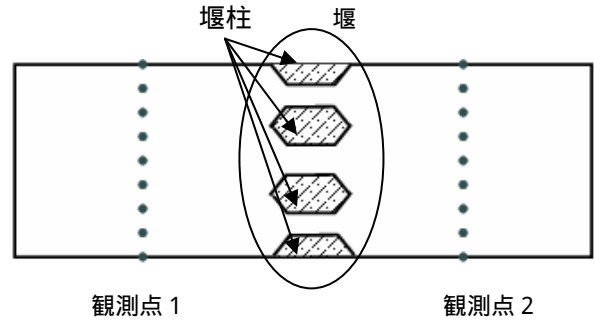


図 - 1 解析モデル図

3.2. 解析結果

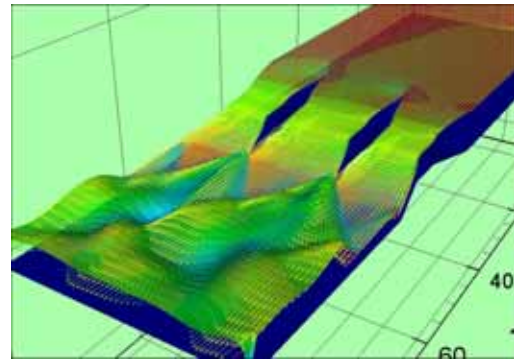


図 - 2 解析モデル図

解析結果 (図 - 2) は順解析の結果である. 本研究では堰の上下流側における水位に着目し, 目的とする水位になるような堰の高さについて検討を行う.

5. 参考文献

1. 松本純一, 川原睦人 MINI 要素を用いた流体—構造連成問題における安定形状同定 応用力学論文集, vol.3(2000 年 8 月)
2. 松本純一, 川原睦人 線形型気泡関数を用いた非圧縮粘性流体解析と適応型有限要素法 応用力学論文集, vol.2(1999 年 8 月)
3. 松本純一, 梅津剛, 川原睦人 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析 応用力学論文集, vol.1(1998)