非圧縮粘性流れに対する最適形状問題

中央大学大学院理工学研究科 学生会員 〇大和田康文 中央大学理工学部 正会員 川原睦人

1 はじめに

流体中に存在する物体,例えば橋脚等の構造物や船舶,航空機の翼などは,周囲の流れにより抗力を受ける.これら物体の受ける抗力は小さくすることが求められ,従来は実験や技術者の経験等に基づいて形状設計が行われてきたが,これらは必ずしも最適であるとは言えなかった.しかし,近年では CFD と最適化手法を組み合わせることによって自動的に最適形状を求める研究が行われている.

既存の研究では、まずPironneau^{1,2,3}により同一体積の下 Stokes 近似の成り立つ低レイノルズ数流れにおいて抗力最小形状が求められた。その後、支配方程式に Stokes 近似や Oseen 近似を用い、物体の体積一定条件の下、抗力を直接目的関数に導入することによっても、低レイノルズ数の定常流れにおいて抗力最小形状^{4,5}が得られている。そこで本研究では、上記で提案されたアルゴリズムをよりレイノルズ数の高い非定常の非圧縮 粘性流れに適用し解析解を得ることを目的とする.

2 抗力最小化システム

2.1 最適形状問題の定式化

最適制御理論は、目的関数を設定し、ある拘束条件の下で目的関数が最適になるような設計変数を決定することである.抗力最小形状の設計を行う本研究では、物体表面座標を設計変数 X_i とし、抗力 D を目的関数 J(D) に設定する.ここで、抗力 D は設計変数 X_i や流れ変数 U_j に依存するため目的関数は次のように表すことができる.

$$J(D) = J(X_i, U_j)$$

また本研究では、流れ場は非圧縮 Navier-Stokes 方程式 $R_k(X_i,U_j)=0$ とその境界条件に支配されるものとし、物体の体積を一定に保つ体積制約 $A(X_i)=0$ を考慮するのでこれらが拘束条件となり最適形状問題は次のように定式化できる.

Minimize
$$J(X_i, U_j)$$
 $(i = 1, n; j = 1, m)$

Subject to
$$R_k(X_i, U_j) = 0$$
 $(k = 1, l)$
 $A(X_i) = 0$

2.2 停留条件の導出

このような拘束条件つき最小化問題は,随伴変数 U_k^* , λ を用いる Lagrange 乗数法により拘束条件なしの最小化問題に変換でき,次のように目的関数は拡張される.

$$J^{*}(X_{i}, U_{j}, U_{k}^{*}, \lambda) = J(X_{i}, U_{j}) + U_{k}^{*}R_{k}(X_{i}, U_{j}) + \lambda A(X_{i})$$

この拡張された目的関数の第一変分をゼロとすることによって目的関数を最小化するための停留条件を導くことができる.

$$\delta J^* = \left(\frac{\partial J}{\partial X_i} + U_k^* \frac{\partial R_k}{\partial X_i} + \lambda \frac{\partial A}{\partial X_i}\right) \delta X_i$$
$$+ \left(\frac{\partial J}{\partial U_j} + U_k^* \frac{\partial R_k}{\partial U_j}\right) \delta U_j$$
$$+ R_k(X_i, U_j) + A(X_i) = 0$$

2.3 最小化手法

形状更新のための勾配G, は以下のように得られる.

$$G_{i} = \frac{\partial J^{*}}{\partial X_{i}} = \frac{\partial J}{\partial X_{i}} + U_{k}^{*} \frac{\partial R_{k}}{\partial X_{i}} + \lambda \frac{\partial A}{\partial X_{i}}$$

そして,最小値探索アルゴリズムとして最急降下法を 適用し形状更新は以下の方程式より行われる.

$$X_i^{\text{(new)}} = X_i^{\text{(old)}} + \frac{1}{W}G_i$$

ここで、W は重み関数である.

2.4 アルゴリズム

抗力最小化アルゴリズムを以下に示す.

- 1. 初期形状を設定する.
- 2. 順解析より流れ変数を求める.
- 3. 逆解析より随伴変数を求める.
- 4. 勾配G, を求め形状の更新を行う.
- 5. 収束条件を満たせば計算終了. そうでなければ 2.に戻る.

3 CFD解析

有限要素法を用いて支配方程式と随伴方程式の離散 化を行う.空間方向の離散化としては,安定化気泡関数 有限要素法⁶を適用し,流速に関しては気泡関数要素, 圧力に関しては一次要素を用いる.また,時間方向の離 散化としては,時間増分が長くとれ安定性に優れた陰 的解法を適用する.

4 数值解析例

4.1 解析モデル

図.1 に示す解析モデルにおける物体の抗力最小化問題を扱う.有限要素メッシュを図.2 に示す.節点数は1760,要素数は3328である.また,本研究ではレイノルズ数1,10,50,100 に対して形状決定を行う.

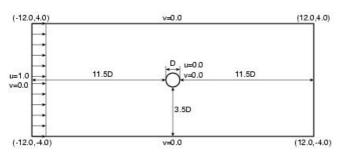


図.1 解析領域と境界条件

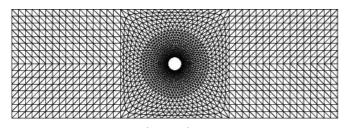


図.2 有限要素メッシュ

4.2 解析結果

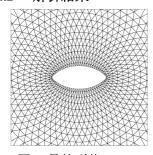


図.3 最終形状(Re=1)

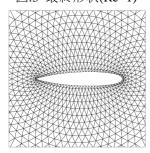


図.5 最終形状(Re=50)

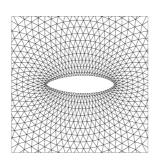


図.4 最終形状(Re=10

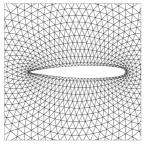


図.6 最終形状(Re=100)

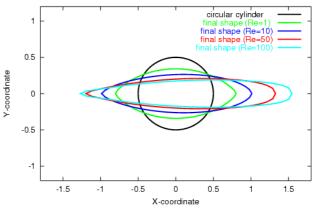


図.7 初期形状と最終形状

図.3,4,5,6 はそれぞれのレイノルズ数に対する最終形状の有限要素メッシュを示す.尚,それぞれのレイノルズ

	初期形状
Re1	円柱
Re10	Rel の最終形状
Re50	Re10 の最終形状
Re100	Re50 の最終形状

数に対する初期形状は左記の表のように設定した.また,これら初期形状と最終形状を比較したものを図.7に示す.

5 おわりに

本研究では,支配方程式に非圧縮 Navier-Stokes 方程式を適用することで,よりレイノルズ数の高い流れに対して形状決定を行った.また,レイノルズ数 1 に対し,本研究で得られた最終形状と既存の研究で得られている抗力最小形状は一致しており,非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して形状最適化アルゴリズムが適用できたと言える.今後の課題としては,解析解が最適解であるかの数値的証明やよりレイノルズ数の高い流れへの適用が挙げられる.

参考文献

- 1. O.Pironneau, On Optimum Profiles in Stokes Flow, J.Fluid Mech, 59, No.1, 117-128, 1973.
- 2. O.Pironneau, On Optimum Design in Fluid Mechanics, J.Fluid Mech, 64, No.1, 97-110, 1974.
- 3. O.Pironneau, Optimal Shape Design for Elliptic Systems, Springer, 1983.
- 4. K.Ochiai, Shape Optimization Problem for Incompressible Viscous Flow, 2002.
- Y.Ogawa, Shape Optimization a Body Located in Incompressible Viscous Flow Based on Optimal Control Theory, 2003.
- J.Matsumoto, Computational Study on Forward and Inverse Analyses of Fluid Problem by Stabilized Bubble Function Finite Element Method, 2003.