

有限要素法による都市域の浅水長波洪水氾濫解析

中央大学 学生員 ○ 岡田 岳
(株) アイ・エヌ・エー 正会員 高木 利光
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

近年、都市化に伴う雨水流出係数の増加により、都市の洪水氾濫の危険性が増している。氾濫現象を解析する方法として、浅水長波方程式を用いた数値計算が広く行われている。氾濫解析において、水際線の挙動を評価する代表的な方法としては、Euler 的移動境界手法がある。この手法により水際線を正確に考慮するには、細密な要素分割が必要となる。しかし、解析領域全体に対して細密なメッシュを用いることは、計算時間と計算機容量の点で問題となる。

そこで本研究では、Euler 的移動境界手法において、水際要素及びその周辺の要素のみを細分化するアダプティブメッシュ法を適用し、比較的低下像度で水際線の挙動を正確に評価する手法の構築を行った。数値解析例として、矩形造波水槽内の水際線移動問題を取り上げ、実験値との比較により、本手法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式と有限要素法

浅水域における移動境界問題の基礎方程式は、以下に示す浅水長波方程式で表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial (h + \zeta + z)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \zeta) u_i] = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は断面平均流速、 h は水深、 z は標高値、 ζ は水位変動量、 g は重力加速度を示す。

式 (1),(2) の時間微分項を前進差分近似により評価する際、Taylor 展開を 2 次の項まで考慮する BTD (Balancing Tensor Diffusivity method) 法を適用した。これに衝撃捕捉項 (Shock-Capturing term) を加えることにより、式 (3),(4) に示す重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i^* \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial (h + \zeta + z)}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u_k^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \left\{ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial (h + \zeta + z)}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ + \delta \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^* \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \zeta) u_i] \right\} d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_j} u_j \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \zeta) u_i] d\Omega \\ + \delta \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 Δt は微小時間増分を、各要素の積分総和項である衝撃捕捉項の安定化パラメータ δ は次式で示される。

$$\delta = \frac{\|u_i\| h_e}{2} \quad (5)$$

なお、 h_e は要素サイズを示す。

式 (3),(4) の時間微分項に対して前進差分近似を用い、断面平均流速 u_i と水深 h 、水位変動量 ζ 、河床標高 z の補間関数は三角形一次要素を用いて離散化を行った。これより時間ステップ n における未知量 u_i^{n+1}, ζ^{n+1} について非定常計算を行った。なお、計算コストの観点から陽解法とし、安定化手法としてマルチパス法を用いた。

2.2 移動境界手法

移動境界処理として本報告では、複雑地形に対する適用性に優れた、固定メッシュを用いる Euler 的手法を採用した。Euler 的手法とは、対象領域をあらかじめ要素分割しておき、各時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定することにより水際線を表現する方法である。アルゴリズムの詳細は参考文献¹⁾を参照されたい。

2.3 アダプティブメッシュ法

精度の点で問題となる水際近傍要素を細分化するアダプティブメッシュ法を適用した。通常アダプティブメッシュ法とは誤差指標を評価し、細分化を行う要素を決定するが、本報告では単純に水際要素及びその周辺の要素を細分化することとし、その手法として h 法を用いた。以下にそのアルゴリズムを示す。

図-1(a) に示す水際線 (破線) が存在したとする。

1. 陸水判定により水域、水際要素を決定する [図-1(b)]。
2. 各水際要素の節点を有する要素を、その要素辺の中点を結んでできる 4 つの小要素に分割する [図-1(c)]。
3. 水域要素において、細分化要素と 2 つの節点を共有する要素 [図-1(c) 要素 A,B,C] を 2 つに分割する。また、共有する辺が二つ存在する要素 [図-1(c) 要素 D] に関しては、共有しない辺に中点を設け、4 つの

小要素に分割し、さらに共有しない辺を有する要素[図-1(c) 要素E]を2つに分割する[図-1(d)]。なお、陸域においては上記のように要素の修正を行っていないが、陸域要素は解析領域に含めないで、問題とはならない。

以上のアルゴリズムを複数回繰り返すことにより、より細分化された要素を得ることができる。なお、新節点の物理量は両端節点の平均値とした。

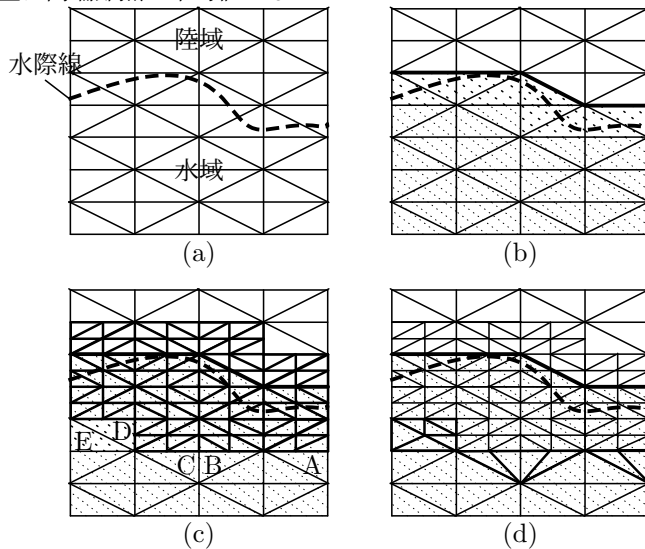


図-1 アダプティブメッシュ法

3. 数値解析例

3.1 矩形造波水槽内の水際線移動問題

アダプティブメッシュ法の有効性を検討するため、矩形造波水槽内の水際線移動問題²⁾を取り上げ、細分化回数による計算時間及び精度の比較を行った。検討に用いた造波水槽は図-2に示す。この水槽において、境界A-Bに式(6)で表される正弦波の半周期を入射波として与えた。

$$\hat{\zeta} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \hat{u} = \sqrt{\frac{g}{h+\zeta}}\zeta \quad (6)$$

ここで、 A は振幅、 T は周期、 $\hat{\cdot}$ は既知量を示す。また、境界条件として側面でslip条件、初期条件として静水状態を与えた。有限要素分割は図-3に示す、斜面部分の分割幅が $dx = 200, 50$ [cm]の二つを用いた。前者においてはアダプティブメッシュ法を適用し、細分化回数を1と2回行った計4ケースの計算精度について比較を行った。なお、 $dx = 200$ [cm]において細分化回数を2回行った水際線付近の要素における分割幅は、 $dx = 50$ [cm]の分割幅と等価である。解析結果の妥当性を検討するため、図-4に示す遡上高さ R 、及び勾配変化点での水位変動量 H' において実験値との比較を行った。実験値の詳細は参考文献²⁾を参照されたい。なお、微小時間増分 Δt は0.001 [sec]、マルチパスの反復回数は3回、陸水判定に用いる微小量 ε は0.001 [m]とした。

結果を表-1に示す。細分化を行うことで R の平均相対誤差率は低減されるものの、 H' に関しては細分化の有効性

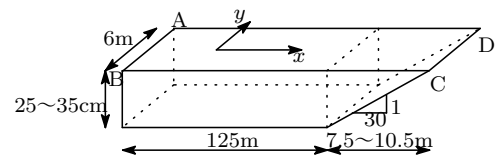


図-2 矩形造波水槽

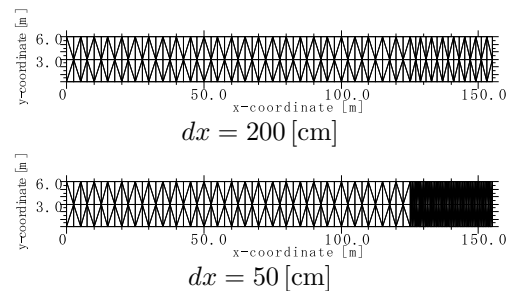


図-3 有限要素分割図

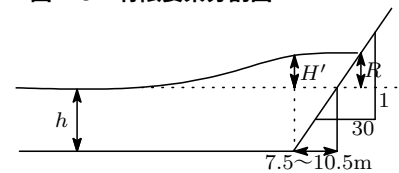


図-4 遡上高さ R 及び勾配変化点での水位変動量 H'

が示せなかった。 $dx = 200$ [cm]の要素において細分化回数を2回行った R は、 $dx = 50$ [cm]の要素に比べ精度の良いものとなったが、計算時間は増加した。なお、計算時間とは300 [sec]までの現象を解析するのに要した時間であり、計算機としてはIBM pSeries690を使用した。また、平均相対誤差率とは50通りの実験値との相対誤差の平均値である。

初期分割幅 [cm]	細分化回数	水際要素分割幅 [cm]	計算時間 [sec]	平均相対誤差率 [%]	
				H'	R
200	0	200	50.32	9.29	10.70
	1	100	1:03.02	9.36	8.96
	2	50	1:16.55	9.66	7.53
50	0	50	1:04.72	9.42	7.80

表-1 細分化回数による計算時間及び精度の推移

4. おわりに

本報告では、アダプティブメッシュ法を導入したEuler的移動境界手法の構築を行った。数値解析例として、矩形造波水槽内の水際線移動問題を取り上げ、実験値との比較によりアダプティブメッシュ法の有効性を検討した。その結果遡上高さ R に関してはアダプティブメッシュ法の有効性が示せたものの、勾配変化点での水位変動量 H' 、計算時間の点では示せなかった。

今後の課題として都市域の氾濫解析に向けて、流入境界処理の検討、本手法の定量的評価が挙げられる。

参考文献

- 1) Mutsuto Kawahara, Tsuyoshi Umetsu: 'Finite element method for moving boundary problems in river flow', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6, pp.365-386, 1986.
- 2) 首藤伸夫: '長波の打ち上げ高', 第13回海岸工学講演会講演集, pp.216-222, 1966.