

VOF 法を用いた安定化有限要素法によるリーフ上での波動解析

中央大学 学生員 ○ 加藤 和範
中央大学大学院 学生員 弘崎 聡
日本工営株式会社 正会員 桜庭 雅明
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

本論文は、任意地形形状における複雑な波動現象を安定かつ高精度に解析するため、VOF 法¹⁾に基づく数値解析手法を提案するものである。離散化手法としては、任意形状への適合性に優れかつ高精度な P1/P1 (流速・圧力 1 次) 要素を用いた SUPG/PSPG(Streamline Upwind-Petrov Galerkin / Pressure Stabilizing-Petrov Galerkin) 法²⁾に基づく安定化有限要素法を用いた。自由表面位置を決定する移流方程式の解法には、三角形要素に対しても CIP 法と同等の高精度な計算が可能である CIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area coordinate) 法³⁾を用いた。数値解析例として、リーフを有する波動問題を取り上げ、実験値⁴⁾との比較を行い本手法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

(1) 流れ場の計算

本手法における基礎方程式は、エネルギー減衰を考慮した非圧縮粘性流体の Navier-Stokes の運動方程式と連続式で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} + \mathbf{D}_x \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここに、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力、 $\mathbf{D}_x$ はエネルギー減衰帯のための係数を表している。また、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3)$$

ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数である。また、Dirichlet 型、Neumann 型境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 Γ_g 、 Γ_h は流速、トラクションが既知の境界、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

式 (1)、(2) に対する空間方向の離散化には、SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用いた。時間方向の離散化には、2 次精度を有する Crank-Nicolson 法を適用し、連立一次方程式の解法には Element-by-Element に基づく GMRES 法を用いた。

(2) 自由表面の計算

自由表面流れにおける界面関数 (VOF 関数) は、次式のような移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad (6)$$

ここに、 ϕ は VOF 関数を表し、液体であれば 1、気体であれば 0、自由表面上であれば 0.5 となる。なお、各節点における気体、液体の密度と粘性係数は、計算された VOF 関数を用いて次式のように決定できる。

$$\rho = \rho_{Liq} \phi + \rho_{Gas} (1 - \phi) \quad (7)$$

$$\mu = \mu_{Liq} \phi + \mu_{Gas} (1 - \phi) \quad (8)$$

ここに、 ρ_{Liq} 、 ρ_{Gas} 、 μ_{Liq} 、 μ_{Gas} はそれぞれ液体、気体の密度および粘性係数である。また本研究では、計算で生じる液体・気体の体積変化を既存の体積補正手法²⁾を用いて補正した。

(3) CIVA 法による界面位置決定方法

自由表面の計算に関する基礎方程式である移流方程式 (6) の解法には、CIVA 法を用いた。計算方法は、移流方程式 (6) の厳密解である式 (9) を用いて、 $\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ の解を求めるために、 $t - \Delta t$ の値である $\phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t)$ を用いる。なお、上流点 $\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t$ に位置する ϕ^n の値は、上流側の要素内で補間することによって求める。

上流側の要素に対する高次多項式として、三角形要素の場合は、式 (10) のように面積座標を用いて表現できる。

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \phi^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}\Delta t, t - \Delta t) \quad (9)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (10)$$

ここに、 (L_i) は要素内の面積座標であり、 d は調節パラメータで、 $d = 0$ のとき 1 次補間、 $d = 1$ のとき 3 次補間となる。なお、 c は既往の研究で最適として示された 1/2 を用いた。 α_i 、 β_{jk} は係数であり、上流側の三角形要素のスカラー量 ϕ とその空間微係数を用いることにより決定され、以下のようなになる。

$$\alpha_i = \phi_i \quad (11)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla \phi_j \quad (12)$$

KeyWords： 安定化有限要素法, CIVA 法, VOF 法, 波動解析

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kazu-1@kc.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

数値解析例として、2次元のリーフを有する波動問題を取り上げた。解析モデルを図-1に示す。沖側境界に入射波高 $H_{in} = 5.64$ cm, 周期 $T = 1.6$ s, 入射波長 $L_{in} = 277.55$ cm となるクノイド波第3近似解に基づく流速と水位を与え造波させた。また、リーフ上では non-slip 条件とし、岸側にはエネルギー減衰帯を設け、岸側境界には sommerfeld の放射条件を適用した。有限要素分割は図-2に示すような節点数 26,253, 要素数 51,725 である非構造格子を用い、微小時間増分量は $\Delta t = 2.0 \times 10^{-3}$ s とした。

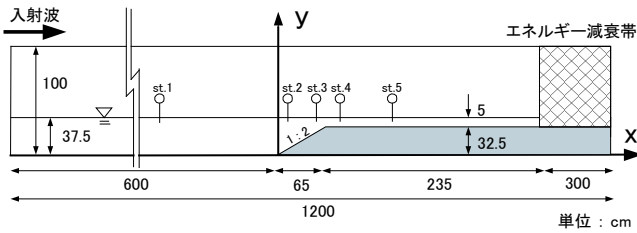


図-1 解析モデル

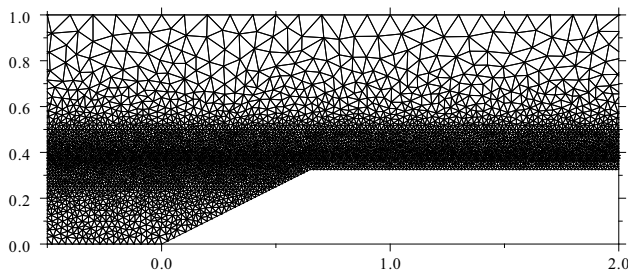


図-2 解析メッシュ拡大図

図-3に図-1の st.1,2,3,4,5 における水位変動量 η の時系列を示す。図より、本手法による解析結果は、実験値と全体的にはほぼ一致を示しリーフ上における波形の変化を良く表現できている。また、図-4は波高 H および平均水位 $\bar{\eta}$ の分布を比較したものである。浅水変形、砕波点直後の波高減衰および砕波後の平均水位の上昇を捕らえることができ、全体的に実験値にほぼ一致を示している。

4. おわりに

本論文は、任意地形形状における複雑な波動現象を安定かつ高精度に解析するため、VOF 法に基づく数値解析手法の提案を行った。数値解析例として、リーフを有する波動問題を取り上げ、本手法の有効性を検討した。その結果、リーフを有する波動問題において、本手法は実験値とほぼ一致を示し、リーフ上での波動特性を表現できた。これより、本手法の有効性が確認できた。

今後の課題として、3次元性を有する問題、実地形での解析を考えている。

参考文献

- 1) Hirt, C.W., Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39, pp.201-255: 1981
- 2) 桜庭雅明, 弘崎聡, 榎山和男: 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, vol.6, pp.215-222: 2003

- 3) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集 (B 編), 64 巻 620 号: 1998
- 4) 谷本勝利, 趙群, 中村廣昭: LES - VOF 法によるリーフ上での数値波動解析, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.151-155: 1998

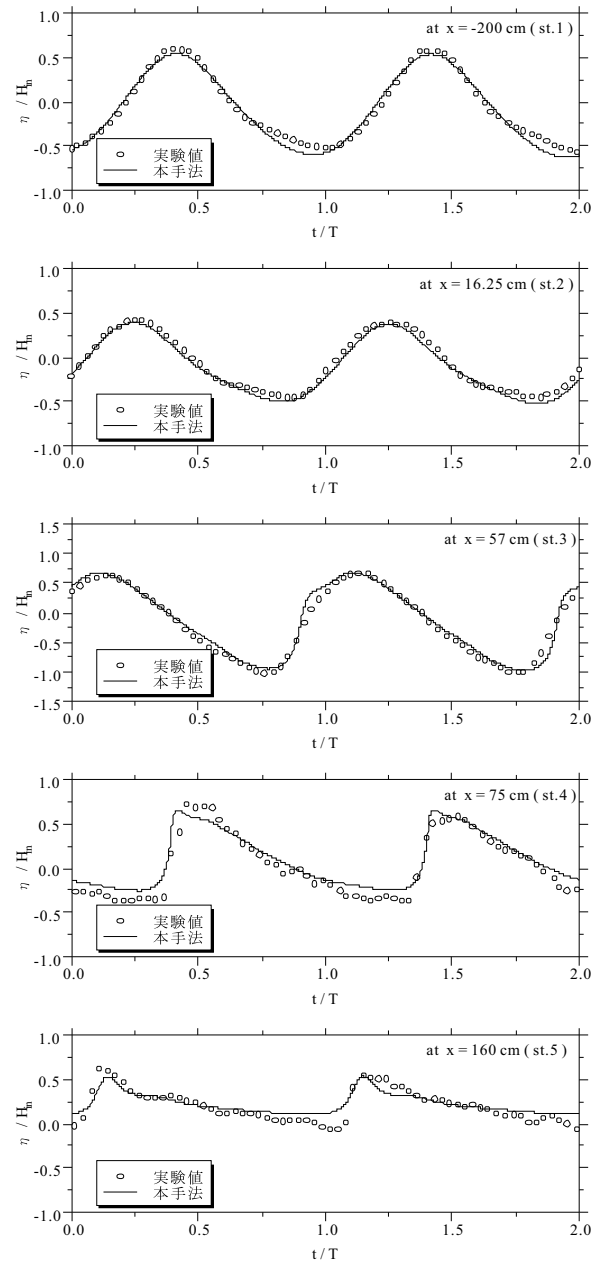


図-3 水位変動量の時系列

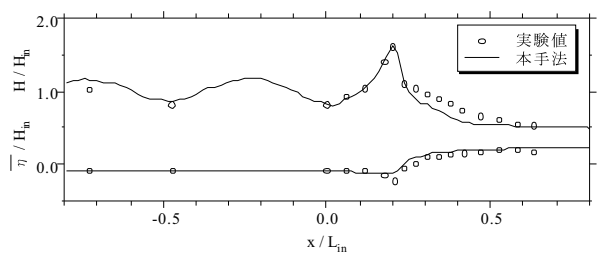


図-4 波高および平均水位の分布