小規模河床波の発生発達に関する基礎的研究

中央大学大学院　　学生員　○渡辺　晋平
中央大学理工学部　　正会員　　岡田　将治
中央大学理工学部　　正会員　　山田　正

1.はじめに:小規模河床波は流砂の遅れの距離や，底面形状と底面せん断応力との間の位相差の特性を有していることが Kennedy[1)]，Hayashi[2)]によって示されている．本研究では，小規模河床波を支配する基本式を導出し，これらの特性が発生発達に果たす役割を明らかにした．

2.小規模河床波を支配する基本式の導出とその特性:

2.1:基本式の導出:流砂の連続式を式(1)で表す．q_0 は空隙率を考慮した流砂量である．式(2)の q_0 は流砂量が局所的な関数であるとしたときの値，δはいわゆる遅れの距離である．式(2)をテイラー展開し，δの 2 次までの項を考慮すると，式(3)を得る．一般に流砂量と底面せん断応力との間には $q_0 \propto \tau^n$ の関係が認められており，底面せん断応力を式(4)で表現すると,流砂量と底面形状の関係式式(5)を得る．ここに，a，c，m は係数，$m=2n$，$\alpha=2\beta$である．αは Hayashi[2)]により導入された波形勾配の効果であり，底面せん断応力と底面形状の間に位相差が働いていることが解る．河床波上の流速として，流れの連続式より導かれる式(6)を用いる．式(6)をテイラー展開し，(η / h)の 3 次以上の項を無視すると，底面流速と底面形状の関係式(7)を得る．平均流砂量を$\bar{q}=C\bar{U}^m$とし，式(3)，(5)，(7)を式(1)に代入することにより，河床波を支配する基本式**(8)**を得る．式(7)を$\eta'=\eta/h$, $x'=x/h$, $t'=t\bar{q}/h$で示される量で無次元化すると式(9)を得る．

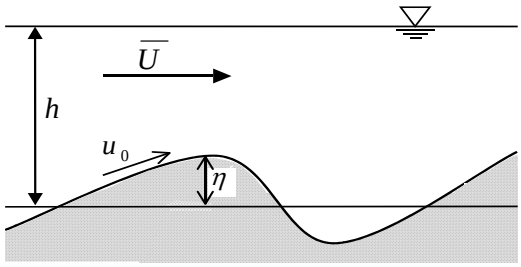


図-1 河床波上の流れの模式図と記号の定義
($\bar{U}$:流れの平均流速　u_0:河床波上の流速
η:局所的な波高　h:平均水深)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \textbf{(1)},\quad q(x)=q_0(x-\delta) \quad \textbf{(2)},\quad q_0(x-\delta)=q_0(x)-\delta\frac{\partial q_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} \quad \textbf{(3)}$$

$$\tau=au_0{}^2(1+\beta\frac{\partial\eta}{\partial x}) \quad \textbf{(4)},\quad q_0(x)=cu_0{}^{2n}(1+n\beta\frac{\partial\eta}{\partial x})=cu_0{}^m\left(1+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \quad \textbf{(5)},\quad u_0=U\frac{h}{h-\eta} \quad \textbf{(6)},\quad u_0=U\left(1+\frac{\eta}{h}+\frac{\eta^2}{h^2}\right) \quad \textbf{(7)},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+m\frac{\bar{q}}{h}\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\bar{q}\left\{\alpha-m\frac{\delta}{h}\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)\right\}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\left\{\frac{1}{2}\delta^2 m\left(1+2\frac{\eta}{h}\right)\frac{\bar{q}}{h}-\alpha\delta\bar{q}\right\}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\alpha\delta^2\bar{q}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0 \quad \textbf{(8)}$$

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t'}+m(1+2\eta')\frac{\partial\eta'}{\partial x'}+\left\{\alpha-m\frac{\delta}{h}(1+2\eta')\right\}\frac{\partial^2\eta'}{\partial x'^2}+\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\delta}{h}\right)^2(1+2\eta')-\alpha\left(\frac{\delta}{h}\right)\right\}\frac{\partial^3\eta'}{\partial x'^3}+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\delta}{h}\right)^2\frac{\partial^4\eta'}{\partial x'^4}=0 \quad \textbf{(9)}$$

2.2:基本式の特性:式(9)の左辺第**1**項は非定常項であり,第2項が移流項である.この項の非線形性より河床波は波高の高いところほど速く進み,前傾化して行くことが予想される.第 3 項は拡散項であり,拡散係数が負の値をとる場合,河床の不安定=河床波の発生を意味する.この項より,αが発生に,δが抑止効果を有していることが解る.第 4 は分散項であり,河床波の前傾化を短波長の波の発生によって分散させる効果を持っている.第 5 項は散逸項であり,河床波の成長そのものを抑える働きをしている.

2.3:卓越波長について:河床波の発生初期は波高が小さいことから,基本式(9)の非線形項は無視し得るオーダーとなり,線形偏微分方程式(10)となる.η'を式(11)で仮定すると,σ-k の分散関係式(12)を得る.このとき,成長率最大を示す波数 k_{max} は,$Re[d\sigma/dk]$を満たすものであり，$k_{max}=(B/2D)^{1/2}$ を得る．ここに，$B=\alpha-m(\delta/h)$，$D=0.5\alpha(\delta/h)$である.成長率を最大にする卓越波長は近似的に $L_{max}/h=2\pi/k_{max}$,$=2\pi\delta/h$ となる.

$$\eta'_{t'}+A\eta'_{x'}+B\eta'_{x'x'}+C\eta'_{x'x'x'}+D\eta'_{x'x'x'x'}=0 \quad \textbf{(10)},\quad \eta=\exp(ikx'+\sigma t') \quad \textbf{(11)},\quad \sigma=k^2B-k^4D-i(Ak-Ck^3) \quad \textbf{(12)}$$

3.数値解析:　先にも述べたが，流砂量と底面せん断応力との間には $q_0 \propto \tau^n$ の関係が認められており，底面せん断応力を式(4)で表すと，流砂量を式(5)で表せる．式(5)より $m=2n$，$\alpha=n\beta$である．式(4)の河床波上の流速 u_0 をポテンシャル流より導かれる式(13)で，河床波の底面形状を式(14)で表現し，式(4)に代入する．そして，1 波長の無次元せん断応力で無次元化すると，式(15)を得る．

$$u_0=\bar{U}+\bar{U}ak\frac{1}{\tanh kh}\cos kx \quad \textbf{(13)},\quad \eta=a\cos kx \quad \textbf{(14)},\quad \tau/f\rho\bar{U}^2=\left(1+ak\frac{1}{\tanh kh}\cos kh\right)^2(1-\beta ak\sin kx) \quad \textbf{(15)}$$

式(15)と Hnratty ら[3)]の実験結果を参照しαの値を決定した．その結果を図-2 に示す．せん断応力は底面形状に対して上流側にずれていることがわかる．βは 7.0～11.0 の値をとり,ここでは掃流砂の場合を考え,$q_0 \propto \tau^{3/2}$の関係(n=3)から,αは 10.5～16.5 の値で解析を行った．

キーワード：小規模河床波，遅れの距離，位相差，流砂量，支配方程式
連絡先：東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部土木工学科・tel03－3817－1805・fax03－3817－1803

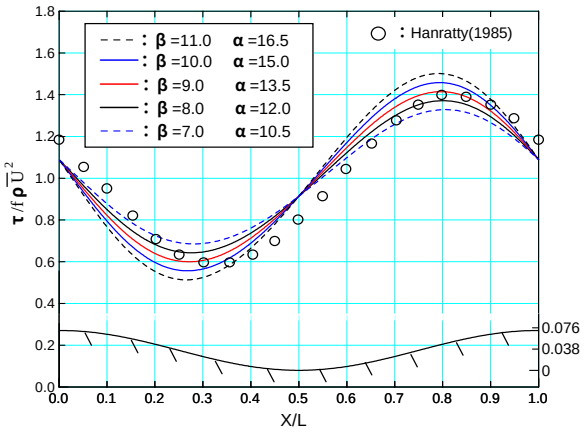
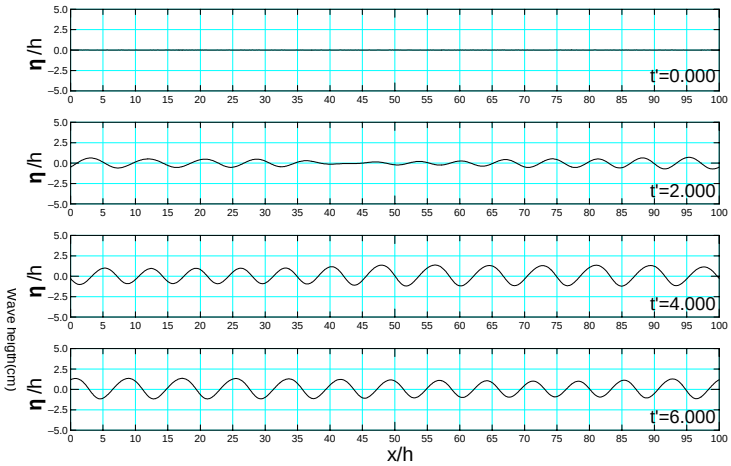


図-2 無次元せん断応力 $\tau/f\rho\overline{U}^2$ と α の関係



3.1 解析手法：解析には無次元化された基本式(9)を用いた.移流項と拡散項には4次精度の中央差分,分散項と散逸項には 2 次精度の中央差分を施し，非定常項には,4次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いた.流路長は発生する波長よりも十分に長い,無次元長さ x/h=100 であり,境界条件には,上流端,下流端で同じ値をとる周期境界条件を用いた.初期条件には,η/h に O (10^{-3}) の乱数を与えた.

3．2 解析結果：図-3 はα=13.5，m=3，δ/h=1.0 での河床波の波形である．発生した河床波は波高を増大させ，やがて波高は一定になり，定常な状態になる．図**-4** は，δ**/h=1.0,m=4** において**,**α を **10.5**～**16.5** まで変化させ河床波が定常な状態になったときの波高，波長をそれぞれ示している**.** α の値が大きくなるほど，波高が高くなり**,** 発生発達の要因となっていることが解る．波長はα の値に係わらず，一定の値をとる**.** 図**-5** は α**=13.5**，m**=3** において，δ/h を **0.5**～**1.5** まで変化させ河床波が定常な状態になったときの波高，波長をそれぞれ示している**.** δ/h の値が大きくなると**,**波高は小さくなり**,**波長は長くなる**.**このことより遅れの距離 δ/h は河床波の衰退の効果を有していることが解る**.**

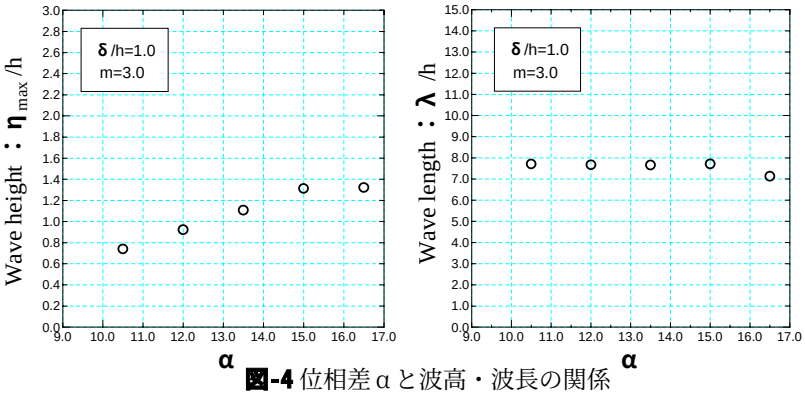


図-4 位相差 α と波高・波長の関係
（δ/h=1.0　m=3）

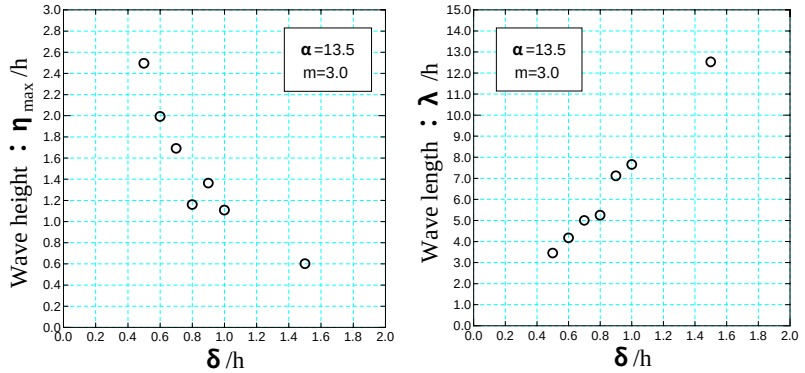


図-5 遅れの距離 δ/h と波高・波長の関係
（α=13.5　m=3）

4.まとめ：本研究では小規模河床波を支配する基本式を導出し，流砂の遅れの距離と，底面形状と底面せん断応力の位相差が発生発達に果たす役割を調べた．得られた知見を以下に示す．(1)底面せん断力と底面形状との間の位相差をあらわすαは，Hnratty ら[3)]の実験結果から,10.5～16.0 程度の値をとることが解った．(2)α はその値が大きくなると，波高は高くなり，河床波の発生発達の要因になっている．(3)遅れの距離 δ/h はその値が大きくなると，波高は低く，波長は長くなり，河床波の発生発達の抑止効果を有している．

参考文献：1)Kennedy,J.F.:The mechanics of dune and antidunes in erodible-bed channels,Fluid Mech.,Vol.16,pp.521～544,1963. 2)Hayashi,T.:Formation of dunes and antidunes in open channels,Proc.ASCE,Vol.96,Bo.HY2,pp.357～366,1970.3)Jonathan ABRAMS,THOMAS J.HANRATTY:Relaxation effects obserned for turbulent flow over a wavy surface, ,Fluid Mech.,Vol.151,pp.443～455,1985. 4)山田正,池内正幸,植松正伸:小規模河床波の発生発達に関する研究,第 31 回水理講演会論文集,pp.665-670,1987.5) 山田正,竹本典道:空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究,第 32 回水理講演会論文集,pp.479-484,1988.