

波状跳水の水面形状に関する一解析

日本大学理工学部 正会員 ○後藤 浩
日本大学理工学部 正会員 安田 陽一
日本大学理工学部 正会員 大津 岩夫

一般に射流から常流に遷移する場合、射流のフルード数 F_1 の値が 1 近くで波状跳水が形成される [$F_1 = v_1 / (gh_1)^{1/2}$; v_1 : 流入射流の断面平均流速, h_1 : 流入射流水深, g : 重力加速度]。従来、波状跳水の水面形について理論的解析^{1)~4)}が試みられている。例えば、Iwasa¹⁾は鉛直加速度を考慮した開水路の基礎式から孤立波・クノイド波解を誘導し、それらを一波目山頂部で連結することによって波状跳水の水面形を表せるものとした。また、Andersen²⁾は Boussinesq のエネルギー方程式から波状跳水の水面形を解析することを試みた。しかしながら、従来の研究者らによって提案された水面形・波高・波長を示す理論解は、流入射流のフルード数 F_1 の値が 1.2~1.3 よりも大きい範囲では実験値を満足しない⁵⁾。

最近、Grillhofer and Schneider⁶⁾は水路勾配が限界勾配よりも大きい場合を対象に摂動法を用いて基礎方程式から 3 階常微分方程式を導き波状跳水の水面形を解析的に示した。

ここでは、急勾配水路で形成される波状跳水の水面形の実験的に示し、Grillhofer and Schneider による水面形解析手法による理論解との比較を行った。

Grillhofer and Schneider による水面形解析手法 図 - 1 に示す水路勾配 α を有する急勾配二次元開水路において形成される波状跳水(Nonbreaking undular jump⁷⁾)を対象とする。また、流入射流は乱流境界層が十分発達した等流とする。波状跳水の水面形を解析するための基礎式としてレイノルズ方程式 (1)、連続の式 (2)、境界条件として水面における運動学および力学的境界条件 (3) ~ (5) 式、底面における運動学的境界条件 (6) 式を用いる。なお、以下に示す基礎式は全て無次元化表示されている。

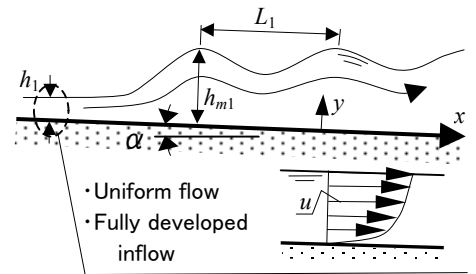


図-1 流入条件

[レイノルズ方程式]

$$F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\alpha}{\delta} - \frac{\alpha}{\delta} \left(\delta \frac{\partial \bar{U}'\bar{U}'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{U}'\bar{V}'}{\partial Y} \right) \quad (1)$$

$$\delta^2 F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - 1 - \alpha \left(\delta \frac{\partial \bar{U}'\bar{V}'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}'\bar{V}'}{\partial Y} \right)$$

[連続の式]

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

[運動学的境界条件]

$$(\text{水面}) \quad \bar{V}(X, \bar{H}) = \bar{U}(X, \bar{H}) \frac{d\bar{H}}{dX} \quad (3)$$

$$\bar{U}(X, \bar{H}) = \frac{\sqrt{\alpha} U_\tau}{F_1} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(Re_\tau U_\tau \bar{H}) + C(X) \right] \quad (4)$$

$$(\text{底面}) \quad \bar{V}(X, 0) = 0 \quad (6)$$

[力学的境界条件(水面)]

$$\left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \bar{U}'\bar{U}'(X, \bar{H}) \right] \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) + \alpha \bar{U}'\bar{V}'(X, \bar{H}) = 0 \quad (5)^*$$

$$\left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \bar{V}'\bar{V}'(X, \bar{H}) \right] + \alpha \bar{U}'\bar{V}'(X, \bar{H}) \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) = 0$$

※ (5) 式は水面での圧力が大気圧に等しいことを意味している。

ここに、 x は水路床に沿った流下方向の長さ、 y は水路床に直な方向の長さ、 $u \cdot v$ は $x \cdot y$ 方向の流速成分、 $u_{\tau 1}$ は流入射流における摩擦速度、 u_τ は $x=x$ における摩擦速度、 $u' \cdot v'$ は $x \cdot y$ 方向の変動流速成分、 h は $x=x$ における水深、 p は圧力、 δ は流下方向の長さとお水深方向の長さを補正するための変数、 κ はカルマン定数であり、各変数の $\bar{}$ は時間平均量を意味する。

ε を摂動核として導入し、未知数全てを (7) 式のように摂動展開する。

$$\begin{aligned} \bar{H}(X) &= H_0 + \varepsilon H_1(X) + \varepsilon^2 H_2(X) \\ \bar{U}(X, Y) &= U_0 + \varepsilon U_1(X, Y) + \varepsilon^2 U_2(X, Y) \\ \bar{V}(X, Y) &= V_0 + \varepsilon V_1(X, Y) + \varepsilon^2 V_2(X, Y) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

なお、 ε の 3 次オーダー以上の項については微小項として無視する。

キーワード：波状跳水、跳水、開水路流、摂動法

連絡先：〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8; TEL. & FAX. 03-3259-0409; E-mail: gotoh@civil.cst.nihon-u.ac.jp

次に、流入射流のフルード数 F_1 および水路勾配 α 、流下方向の長さ x と水深方向の長さ h を補正するための係数 δ を ε と関連付けて次のように表すものとする。

$$F_1 = 1 + K\varepsilon, \quad \alpha = \sqrt{A\varepsilon}, \quad \delta = \gamma\sqrt{\varepsilon} \quad (8)$$

ここに、 K 、 A 、 γ は定数である。なお、 K と γ について Grillhofer and Schneider は式変形の簡便性から $K=1.5$ 、 $\gamma=3$ としている。また、 A については具体的な数値を定めていない。

初期条件は流入射流が等流であることより次のように与える。

$$H_0 = 1, U_0 = 1, V_0 = 0, P_0 = 1 - Y, \overline{U'V'} = Y - 1 \quad (9)$$

(1) ～ (6) 式に (7) ～ (9) 式を代入し整理すると、次の 3 階の常微分方程式 (10) 式が得られる。

$$\frac{d^3 H_1}{dX^3} - \left[6 \frac{K}{\gamma^2} - \frac{9}{\gamma^2} H_1 \right] \frac{dH_1}{dX} - \frac{3}{\gamma} \beta H_1 = 0 \quad \left(\beta = \frac{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{-3/2} \right) \quad (10)$$

実験 実験には水路幅 $B=80(\text{cm})$ 、水路長 $L=18(\text{m})$ の可変勾配式滑面長方形断面水路を用いた。実験では水路勾配を急勾配 ($i=1/80 \sim 1/330$) とし、跳水始端において乱流境界層が十分発達し、かつ等流となるように跳水始端位置を調整した。なお、波状跳水の流況特性がアスペクト比 B/h_1 の影響を受けない条件^{7),8)}のもとで実験を行った。また、実験は波状跳水の形成に対して粘性の影響が無視できるレイノルズ数 Re の範囲 ($Re \geq 6.5 \times 10^4$)⁷⁾ [Re : レイノルズ数 ($=v_1 h_1 / \nu$), ν : 動粘性係数] で実施した。

解析結果と実験結果との比較 図-2 は一波目の波高および波長について (10) 式を数値積分して得られた結果と実験によって得られた結果とを比較したものである [h_{m1} : 一波目山頂部の水深, L_1 : 一波目の波長 (図-1 参照), $h_2 = 0.5 h_1 ((8F_1^2 + 1)^{1/2} - 1)$]。なお、(10) 式を計算する上で K および γ については、 $K=1.5$ 、 $\gamma=3$ を代入した。また、 α および F_1 については、実験で与えた α ($\tan \alpha = 1/80 \sim 1/330$) とそれに対応して得られた F_1 を代入し計算した。

図-2 に示されるように、一波目の波高 h_{m1}/h_1 については、その大きさを精度よく予測することができている。しかしながら、波長 L_1/h_2 の計算値は F_1 が 1.2 近くでほぼ実験値と一致するが、 F_1 が 1.2 よりも大きくなると波長 L_1/h_2 の計算値は実験値よりも小さな値を示す。なお、

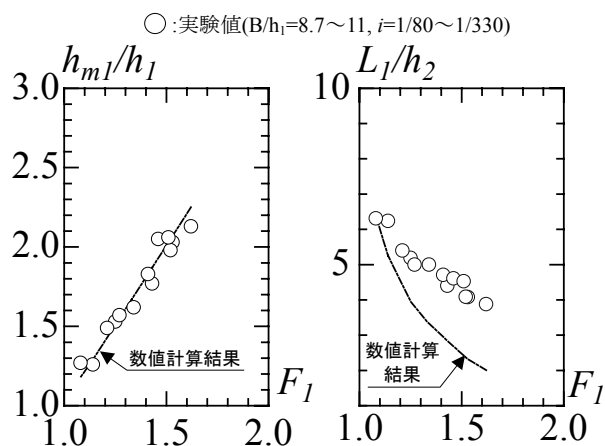


図-2 波高および波長

(10) 式を数値積分し水面形として表した結果と実際の水面形とを比較した一例を図-3 に示す (x : 跳水始端から水路床に沿った流下方向の長さ)。

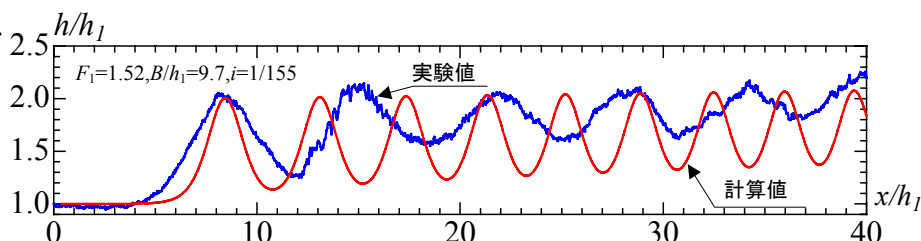


図-3 水面形の比較

今後は、実験値と計算値との比

較から (8) 式における K および γ の値の最適値を求めるなど、Grillhofer and Schneider によって提案された解析手法の適用性を高める工夫を試みる。

参考文献

- 1) Iwasa, Y., Undular jump and its limiting condition for existence, *Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech.*, pp.315～319, 1955.
- 2) Andersen, V.M., Undular hydraulic jump, *Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE*, ASCE, 104(HY8), pp.1185～1188, 1978.
- 3) Hager, W.H. and Hutter, K., On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics, *Acta Mechanica*, 53, pp.183～200, 1984.
- 4) Sandoz, J.A. and Taylor, C., Cnoidal waves and bores, *La Houille Blanche*, Juillet-Aout, 3, pp.443～456, 1962.
- 5) 後藤、安田、大津, 波状跳水の流況特性, 水工学論文集, 土木学会, 第 45 巻, pp.439～444, 2001.
- 6) Grillhofer, W. and Schneider, W., The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers, *Physics of Fluids*, AIP, 15(3), pp.730～735, 2003.
- 7) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 129(12), pp.948～955, 2003.
- 8) 後藤、安田、大津, 波状跳水の流況特性に対する水路勾配の影響, 第 58 回土木学会年次学術講演会講演要旨集, 土木学会, II-093(CD-ROM), 2003.