安定化有限要素法による都市の熱対流解析

中央大学　学生員　○ 板橋　翔
中央大学大学院　学生員　清水　隆博
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

流体流れの有限要素解析において Neumann 型境界条件に Stress-free Condition を用いる場合が多い. しかし，この条件は熱を伴う場合においては熱が境界を横切って流出しないという断熱条件を表している. そのため，出口付近に熱がたまり，不自然な流れが生じてしまう.

そこで，滑らかな流れの流出を実現するため，本論文では安定化有限要素法により，従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件と中山らによって提案された流出境界条件処理法 [1] の考えを応用した流出境界条件との比較検討を行った.

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体を考え, Boussinesq 近似を仮定する. そのとき無次元化された運動方程式，連続式，エネルギー方程式はそれぞれ式 **(1)**, **(2)**, **(3)** で表される.

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{Gr}{Re^2}Tk=0 \tag{1}$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}-\frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}=0 \tag{3}$$

u は流速, p は圧力, T は温度, $Re\,(=UL/\nu)$, は Reynolds 数, $Gr\left(=g\beta\left(T_w-T_c\right)L^3/\nu^2\right)$ は Grashof 数, $Pr\,(=\nu/\alpha)$ は Prandtl 数, $Ra\,(=Pr\times Gr)$ は Rayleigh 数をそれぞれ表している. 但し U は代表流速，L は代表長さ，ν は動粘性係数，g は重力加速度，α は温度伝導率，β は体膨張係数，T_w は高温壁温度，T_c は低温壁温度，k は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している.

$$u_i=g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_g \tag{4}$$

$$\left\{-p\delta_{ij}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}n_j=h_i \quad \text{on} \quad \Gamma_h \tag{5}$$

$$T=\hat{T} \quad \text{on} \quad \Gamma_T \tag{6}$$

$$S=\frac{1}{RePr}\frac{\partial T}{\partial n}=\hat{S} \quad \text{on} \quad \Gamma_S \tag{7}$$

ここで，g_i, h_i はそれぞれ流速，トラクションの既知量，$\hat{T}$ は壁面既知温度，$\hat{S}$ は壁面上の単位法線方向温度勾配，n_j は外向き単位法線ベクトルを示す.

(2) 流出境界条件処理

本論文では境界積分項を未知量として扱う Free Outflow Boundary Condition(F.O.B.C) に線形移流型方程式の Sommerfeld's Radiation Condition(S.R.C) を組み込んだ境界条件を用いる. この方法は中山らによって提案された流出境界条件処理法 [1] の考えを応用したものである.

F.O.B.C を基に境界積分項の定式化の際，x 方向の単位法線ベクトルのみを考慮するものとすると式 **(5)**, **(7)** より，以下の式 **(8)**, **(9)**, **(10)** を得る.

$$\int_{\Gamma_h}w_1h_1d\Gamma=-\int_{\Gamma_h}w_1pd\Gamma+\frac{1}{Re}\int_{\Gamma_h}w_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)n_1d\Gamma \tag{8}$$

$$\int_{\Gamma_h}w_2h_2d\Gamma=\frac{1}{Re}\int_{\Gamma_h}w_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)n_1d\Gamma \tag{9}$$

$$\int_{\Gamma_S}w\hat{S}d\Gamma=\frac{1}{RePr}\int_{\Gamma_S}w\frac{\partial T}{\partial x}n_1d\Gamma \tag{10}$$

ここで，S.R.C(式 **(11)**) により得られる式 **(12)** を式 **(8)**, **(9)**, **(10)** に代入する. また，U_c は伝播速度である.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{1}{U_c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{12}$$

このことより，以下の式が得られる.

$$\int_{\Gamma_h}w_1h_1d\Gamma=-\int_{\Gamma_h}w_1pd\Gamma-\frac{2}{ReU_c}\int_{\Gamma_h}w_1\frac{\partial u}{\partial t}d\Gamma \tag{13}$$

$$\int_{\Gamma_h}w_2h_2d\Gamma=-\frac{1}{ReU_c}\int_{\Gamma_h}w_2\frac{\partial v}{\partial t}d\Gamma+\frac{1}{Re}\int_{\Gamma_h}w_2\frac{\partial u}{\partial y}d\Gamma \tag{14}$$

$$\int_{\Gamma_S}w\hat{S}d\Gamma=-\frac{1}{RePrU_c}\int_{\Gamma_S}w\frac{\partial T}{\partial t}d\Gamma \tag{15}$$

基礎方程式 **(1)**, **(2)**, **(3)** に安定化有限要素法 (SUPG/PSPG 法 [2]) を適用し，更に P1/P1(流速・圧力 1 次) 要素を用いて補間を行うことにより，有限要素方程式を得る. 時間方向の離散化には 2 次精度である Crank-Nicolson 法を用いている. なお，連続式，圧力は陰的に取り扱っている.

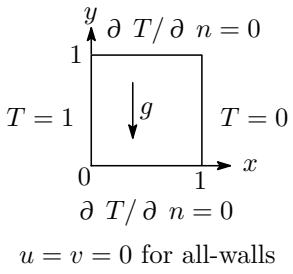
3. 数値解析例

(1) 2 次元正方 Cavity 内自然対流問題

a) 解析条件

対象は非圧縮性粘性流体とし，解析領域，境界条件を**図－ 1** に示す. 解析条件は総節点数 10201，総要素数 20000 最小メッシュ幅 3.19×10^{-3} を用い，$Ra=1.0\times10^9$, $Pr=0.71$ とし，微少時間増分量は $\Delta t=1.0\times10^{-6}$ とした.

KeyWords： 安定化有限要素法，熱対流解析，都市大気環境
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: show@kc.chuo-u.ac.jp



図－１　解析領域・境界条件

b)　解析結果

棚橋らの解析結果[3)]との定量的な比較を**表－１**に示す．**表－１**中の U_{max}, V_{max} はそれぞれ Cavity の中心軸 $x = 0.5, y = 0.5$ における速度の最大値を，x, y はそれぞれ速度の最大値の x, y の座標値を示す．$Ra = 10^9$ のような高 Rayleigh 数でも棚橋らの解析結果[3)]と良好な一致を示すことが出来た．

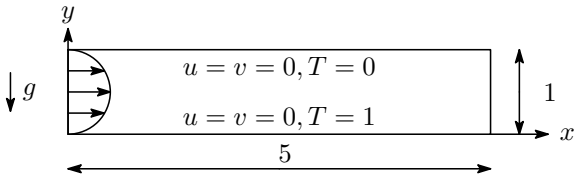
表－１　Ra=10^9 における解析結果の比較

	ΔL_{min}	U_{max} y	V_{max} x
Present	3.19×10^{-3} (100×100)	655.19 0.9300	7166.78 0.00667
棚橋ら[3)]	3.19×10^{-3} (100×100)	603.00 0.9608	7210.00 0.00652

(2)　２次元平行平板間熱対流解析

a)　解析条件

対象は非圧縮性粘性流体とし，解析領域，境界条件を**図－２**に示す．解析条件は総節点数 861，総要素数 1600，最小メッシュ幅 0.05 の当分割メッシュを用い，各無次元数は $Re = 10$, $Gr = 1.5 \times 10^4$, $Pr = 0.667$ とし，微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とした．初期条件は流速および圧力を全領域で 0，温度は下部壁面を除き 0 とした．また流入流速は $u = 4y(1-y)$, $v = 0.0$ で与え，流入壁面温度は $T = 1.0 - y$ とした．なお流出境界条件の比較を Case1 として運動方程式に Stress-free Condition，エネルギー方程式に断熱を，Case2 として運動方程式，エネルギー方程式共に本手法を用いる 2 ケースについて，それぞれ解析を行った．また伝播速度 U_c は流入流速の平均値を与えることとした．

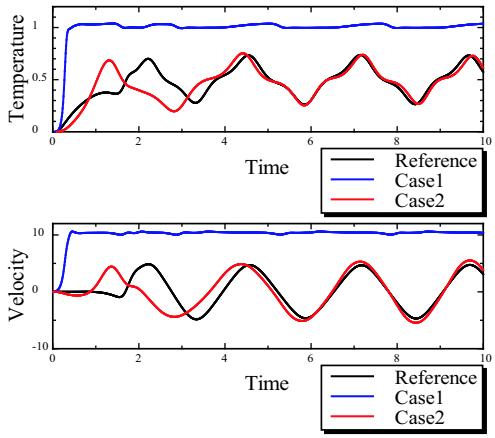


図－２　解析領域・境界条件

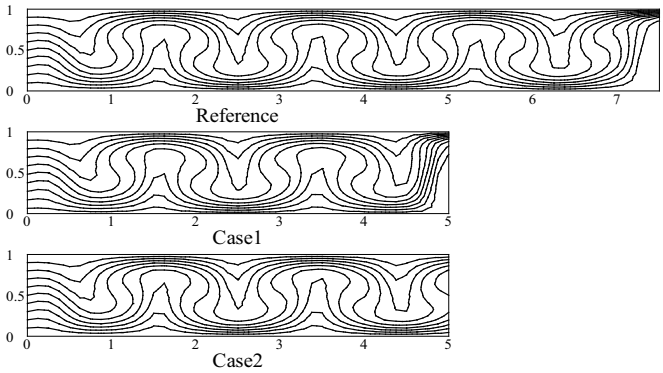
b)　解析結果

図－３に Case1，2 についての節点 $(x, y) = (5.0,\ 0.5)$ における温度と流速成分 v の時間変化の比較を，**図－４**に $t = 5.0$ における等温線図を示す．また参照解は各メッシュのサイズを変えずに x 方向の領域の長さを 7.5 とした時の同じ節点での時間変化である．

Case1 の場合，流出境界から流入が生じ，温度，流速成分 v ともに不自然な値を示してる．一方，Case2 場合，流出境界からの流入は抑制され参照解とも良い一致を示している．多少の位相のずれと流速成分 v の過大評価はあるものの，本手法の有効性が示された．



図－３　節点 (5.0,0.5) における温度と流速成分 v の時間変化



図－４　t=5.0 における等温線図

4.　おわりに

本報告では安定化有限要素法により，従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件と中山らによって提案された流出境界条件処理法[1)]の考えを応用した流出境界条件との比較検討を行った．これより以下の結論を得た．

- 2 次元正方 Cavity 内自然対流問題により高 Rayleigh 数においても精度良く安定した解析値が得られ，本スキームの有効性が確認出来た．
- 本流出境界条件処理法を運動方程式，エネルギー方程式に用いることで，滑らかな流れの流出を実現することができた．

今後の課題として，乱流モデルの導入，３次元への拡張，実地形での解析などがあげられる．

参考文献

1) 中山司，岩崎潤：熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における流出境界条件に関する検討，日本機械学会論文集 (B 編)，58 巻 554 号 (1992-10)，pp.43-48
2) T.E.Tezduyar：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1992.
3) 柴田悦太郎，槙原孝文，棚橋隆彦：CIP 有限要素法を用いた正方キャビティ内自然対流解析，日本機械学会論文集 (B 編)，66 巻 644 号 (2000-4)，pp.99-106