3次元 ALE 安定化有限要素法による構造流体連成解析

中央大学　学生員　○ 河路　薫
中央大学　学生員　田中　聖三
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

構造物の固有周期とその後流域に発生するカルマン渦による変動揚力の周期とが一致すると共振状態となって渦励振現象を引き起こし，構造物の性能に影響を及ぼす．そのため，高層構造物等を設計する上で流体力の影響を考慮することは非常に重要であり，構造・流体連成解析は有効的な手段であると考えられる．

そこで本論文では，ALE 法に基づく流れの支配方程式を用いた構造・流体連成解析手法の提案を行った．流れの基礎方程式の離散化過程で導かれる非線形方程式に対しては Newton-Raphson 法を用いて線形化を施し，また，構造部は剛体を仮定し，運動方程式の解法には Newmark's β 法を用いた．数値解析例として，バネ支持された剛体と流体の連成問題の解析の一例である円柱の渦励振解析を取り上げ，本手法の有効性の検討を行った．

2. 基礎方程式

(1) 流体部の基礎方程式

ALE 法によって記述された非圧縮性粘性流体の運動方程式と連続式はそれぞれ以下のように表される．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\bar{u}_j)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-f_i\right)-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{2}$$

u は流速，$\bar{u}$ は相対流速，p は圧力，ρ は密度，f は物体力を表している．ここで，応力テンソル σ_{ij} は以下の式で表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

ここで，μ は粘性係数である．

(2) 構造部の基礎方程式

物体は，流れの中でバネ支持された剛体を仮定する．その運動方程式は次式のように表される．

$$m\ddot{\delta}_i+c\dot{\delta}_i+k\delta_i=X_i, \tag{4}$$

ここで，$\ddot{\delta},\dot{\delta},\delta$ はそれぞれ加速度ベクトル，速度ベクトル，変位ベクトル，X は物体の重心に働く集中力ベクトルである．

(3) 流体の基礎方程式における安定化有限要素法

基礎方程式 (1)，(2) に対して，SUPG/PSPG 法 [1] に基づく安定化有限要素法を適用し，$P1/P1$ 要素を用いて補間を行うと以下の有限要素方程式が得られる．

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\mathbf{K}(\bar{u}_j)+\mathbf{K}_\delta(\bar{u}_j))u_i \\ -(\mathbf{G}+\mathbf{G}_\delta)\frac{1}{\rho}p+\nu\mathbf{S}u_j-(\mathbf{N}+\mathbf{N}_\delta)f_i=0, \tag{5}$$

$$\mathbf{G^T}u_i+\mathbf{M}_\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial t}+\mathbf{K}_\varepsilon(\bar{u}_j)u_i-\mathbf{N}_\varepsilon+\mathbf{G}_\varepsilon\frac{1}{\rho}p=0, \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{M},\mathbf{K},\mathbf{G},\mathbf{S},\mathbf{N}$ は係数行列であり添字 δ，ε はそれぞれ SUPG 項，PSPG 項に起因するものを表す．

3. 構造と流体の連成方程式

流体における有限要素方程式 (5)，(6) は以下のようなマトリクス方程式に書き換えることができる．

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{u}}+\mathbf{K}\boldsymbol{u}-\mathbf{G}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}, \tag{7}$$

$$\mathbf{G}^T\boldsymbol{u}=0, \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{M}$ は質量行列，$\mathbf{K}$ は移流項と粘性項の行列，$\mathbf{G}$ は勾配行列，$\boldsymbol{f}$ は物体力及び境界 Γ_h 上で与えられるトラクションの寄与も含んでいる．節点変数ベクトルを移動境界 Γ_I(物体表面) 上の成分とそれ以外の成分とに分離 (γ は移動境界 Γ_I 上の節点変数，α はそれ以外の節点変数を表す) して表したとき，物体表面の変数と物体重心で定義された変数は，以下の関係を満足する必要がある．

$$\text{適合条件式}:\boldsymbol{u}^\gamma=\mathbf{T}^T\dot{\boldsymbol{\delta}},\quad \dot{\boldsymbol{u}}^\gamma=\mathbf{T}^T\ddot{\boldsymbol{\delta}}\qquad on\quad \Gamma_I, \tag{9}$$

$$\text{釣り合い条件式}:\mathbf{X}+\mathbf{X}\boldsymbol{f}^\gamma=0\qquad on\quad \Gamma_I, \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{T}$ は，物体の重心と物体表面の各節点の間の幾何学的な関係を表すマトリクスである．式 (9) は，物体が重心速度 $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ もしくは重心加速度 $\ddot{\boldsymbol{\delta}}$ をもつときに物体表面の各節点がもつ速度 $\boldsymbol{u}^\gamma$ と加速度 $\dot{\boldsymbol{u}}^\gamma$ を表し，式 (10) は物体表面の各節点の節点力 $\boldsymbol{f}^\gamma$ の合力が物体重心で定義された集中力 $\mathbf{X}$ に等しいことを表している．

式 (7)，(8) を節点変数で分離した形に書き換え，式 (9) の適合条件式を代入すると以下の式が得られる．

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\gamma} \\ M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\gamma}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}^\alpha \\ T^T\ddot{\delta}\end{Bmatrix}+ \\ \begin{bmatrix} K^{\alpha\alpha} & K^{\alpha\gamma} \\ K^{\gamma\alpha} & K^{\gamma\gamma}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u^\alpha \\ T^T\dot{\delta}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}G^\alpha \\ G^\gamma\end{bmatrix}\boldsymbol{p}=\begin{Bmatrix}f^\alpha \\ f^\gamma\end{Bmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}G^{\alpha T} & G^{\gamma T}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u^\alpha \\ u^\gamma\end{Bmatrix}=0. \tag{12}$$

式 (11) の第 2 行より物体表面の節点力 f^γ を求め，釣り合い条件式 (10) を課して式 (4) の物体の運動方程式に代入すると次のようになる．

$$m^*\ddot{\delta}+c^*\dot{\delta}+k\delta= \\ -\mathbf{T}(M^{\gamma\alpha}\dot{u}^\alpha+K^{\gamma\alpha}u^\alpha-G^\gamma p), \tag{13}$$

KeyWords：　安定化有限要素法，構造流体連成解析，ALE 法，渦励振
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: k-kawaji@kc.chuo-u.ac.jp

ここで，

$$m^* = m + TM^{\gamma\gamma}T^T, \quad c^* = c + TK^{\gamma\gamma}T^T,$$

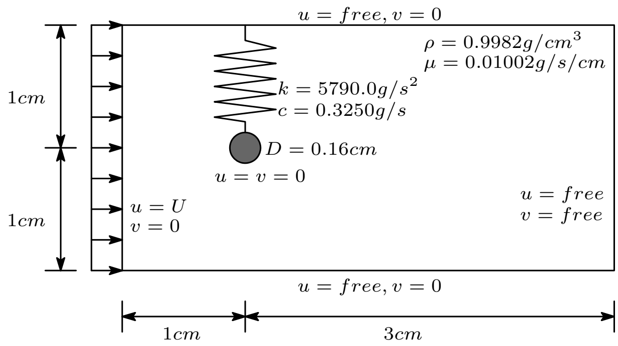
これは，物体の質量と減衰にその周囲の流体との連成による付加的な質量の効果が加わったことを意味している．式 (11) の第 1 行は，物体表面節点以外の節点に関する流体の運動方程式を表している．

物体の運動方程式には，Newmark's β 法を用いて時々刻々の剛体の変位を求める．

4. 数値解析例

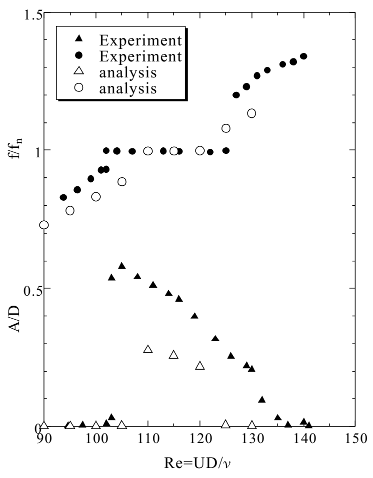
(1) 解析条件

数値解析例として，円柱の渦励振解析を行った．解析モデルは Anagnostopoulos and Bearman [3] がレイノルズ数 110 程度の流れでロックインを捕らえることに成功した水槽実験を対象としたものを用いる．円柱は剛体とし，バネ支持された 1 自由度系のバネ・マス系としている．**図－ 1** に解析領域と解析条件を示す．本論文では，$Re = 90$ から $Re = 130$ まで 5 刻みずつ 9 ケースについて解析を行った．レイノルズ数は上流流速 U を上げていくことによって変化させている．

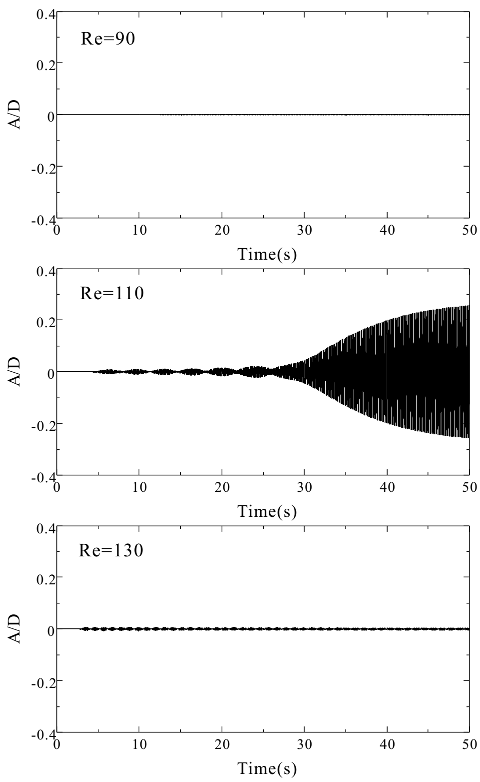


図－ 1 解析対象領域と解析条件

(2) 解析結果



図－ 2 円柱の振動振幅と渦放出周波数の変化 (実験と解析の比較)



図－ 3 A/D(変位/直径) の時刻歴 (Re=90，110，130)

図－ 2 は，各レイノルズ数における円柱の振動振幅と渦放出周波数を示したもである．振幅の解析値は実験値とは差異が見られたが，渦放出周波数が円柱の固有振動数にロックインしている結果が得られた．**図－ 3** に示す振動振幅の時刻歴からもロックイン現象により円柱が大きく振動している様子がうかがえた．これらより，実験値ともほぼ良い一致を示したことがわかり，本手法の有効性を確認できた．また，3 次元解析の結果については，講演時に示すものとする．

5. おわりに

本報告では，円柱の渦励振解析を行い，本手法の有効性の検討を行った．そのことにより，以下の結論を得た．

- レイノルズ数 $Re = 110$ 付近でロックイン現象を捕らえることができ，また，それによる共振現象を確認することができた．
- 解析結果は実験値と良い一致を示し，本手法の有効性が確認できた．

今後の課題として，3 次元解析，並列化手法の導入，構造部を弾性体として扱い有限要素解析を行っていく予定である．

参考文献

1) T.E.TEZDUYAR, Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations, *Advances in Applied Mechanics,Volume 28*，pp1-44，1991.
2) 野村卓史，ALE 有限要素法による流れ・構造連成解析への予測子・修正子法の適用と計算過程に関する技法，土木学会論文集，No.455/I-21，pp55-63，1992.
3) P.ANAGNOSTOPOULOS，P.W.BEARMAN，Response characteristics of vortex-excited cylinder at low Renolds numbers，*Journal of Fluids and Structures,Volume 6*，pp39-50，1992