

# Mindlin 理論におけるせん断補正係数に関する考察

足利工業大学 ○学生会員 宮川卓也  
 足利工業大学 正会員 末武義崇  
 足利工業大学 大友 健  
 足利工業大学 岡 健治

## 1. はじめに

平板は、梁やシェルとともに、構造物の構成部材として広く用いられている。その強度設計や変形性能を評価する上で、弾性平板理論は重要な役割を果たしている。弾性厚肉平板の古典理論としては、Rissner の理論<sup>1)</sup>および Mindlin の理論<sup>2)</sup>が著名である。このうち Mindlin 理論においては、横せん断応力の分布に関し一様分布を仮定しているため、補正係数の導入が必要となる。せん断補正係数を 5/6 とすれば、板厚方向の垂直応力を無視した場合の Rissner 理論と Mindlin 理論とが一致することになる。一方、せん断補正係数の値として 5/6 が最適であるか否かを定量的に調べた研究報告は必ずしも多くない。そこで本研究では、せん断補正係数の値を種々変化させ、Mindlin 理論に従った厚板の Fourier 解析を実施し、三次元弾性論に基づく Fourier 級数解との比較を通じ、補正係数の適切な値について定量的な検討を試みた。

## 2. Mindlin の厚板理論

Mindlin の厚板理論においては、横せん断応力の影響を考慮し、断面の法線性は保持されないと仮定されている。そのため、たわみと傾斜角とは、互いに独立な変数として扱われることになる。得られた基礎方程式から傾斜角を消去し、中央面のたわみ  $w(x, y)$  のみを変数とする基礎方程式を導けば、次式が得られる。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left\{ 1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)\kappa} \nabla^2 \right\} p(x, y) \quad (1)$$

ここで、 $p(x, y)$  は荷重、 $D$  は板の曲げ剛性、 $t$  は板厚、 $\nu$  は Poisson 比、 $\kappa$  は横せん断応力に関する補正係数をそれぞれ表している。

解析対象として、図 1 に示した矩形平板を考える。境界条件として周辺単純支持を想定し、たわみ  $w(x, y)$  および荷重  $p(x, y)$  を次式の Fourier 級数で表すことにする。

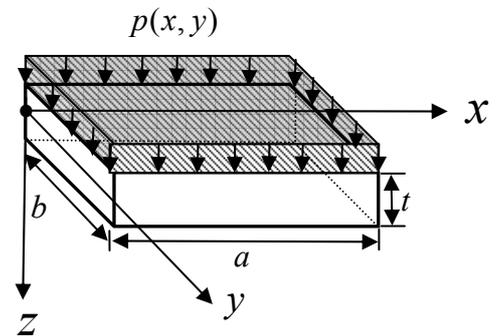


図 1. 解析モデル

$$w = \sum_j \sum_k W_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad p = \sum_j \sum_k P_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}; \quad P_{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p \cdot \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy \quad (2)$$

式(2)を(1)に代入し、式(2)の未定係数  $W_{jk}$  を求めれば、次式が得られる。

$$W_{jk} = \frac{P_{jk}}{D \left\{ (j\pi/a)^2 + (k\pi/b)^2 \right\}^2 \left[ 1 + \frac{t^2}{6(1-\nu)\kappa} \left\{ \left( \frac{j\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \right\} \right]} \quad (3)$$

本研究では、図 1 の矩形平板に対し、三次元弾性論に基づく解析も実施し、解析結果の比較基準とした。

## 3. 解析モデル

解析モデルは、図 1 に示すような周辺単純支持された矩形平板である。解析モデルの寸法については、縦横比  $b/a$  を 1、2 および 3 とし、幅厚比  $t/a$  を 0.001~1.0 の範囲で変化させた。材料定数については、Poisson 比  $\nu=0.3$  とした。荷重は板全体に等分布荷重  $p_0$  が作用するものとした。せん断補正係数  $\kappa$  の値については

キーワード：弾性平板、厚板、Mindlin 理論、三次元弾性論、横せん断応力

0.5～1.5 の範囲変化させて解析を行った。

なお、解析結果の整理にあたっては、三次元弾性論の基礎式である Navier の式を解いて得られた解を基準とし、Mindlin 理論の解析誤差を求める形で整理した。三次元解析の際には、2 つの荷重形式を想定して計算を行った。一方は平板上面全体に等分布荷重  $p_0$  が作用する場合(“3-D 表面力”モデル)であり、もう一方は、体積力として荷重を評価した場合(“3-D 体積力”モデル)である。

#### 4. 解析結果および考察

解析結果を図 2 および図 3 に示す。両図共に、幅厚比の変化に伴うたわみの誤差変化を表している。図 2 および図 3 は、横軸に幅厚比を、縦軸にたわみの解析誤差をそれぞれとって示したものである。図 2 は 3-D 表面力モデルの結果を基準とした場合、図 3 は 3-D 体積力モデルの結果を基準とした場合に対応している。結果は縦横比  $b/a=1.0$  の場合についてのみ示したが、他のモデルの場合も同様の結果が得られている。

図 2 を見ると、補正係数  $\kappa$  の増大に伴って、誤差が全体的に減少している様子が見られるが、 $\kappa$  が 1.0 を超えると、誤差が再び増加する方向に転じていることも分かる。最も解析精度の高い  $\kappa=1.0$  の場合に注目すると、幅厚比が  $t/a \leq 0.6$  の範囲であれば、誤差 1.0[%]以内の極めて良好な解析結果が得られている。一方、Mindlin 理論に基づく解析を行う際に通常用いられる  $\kappa=5/6$  の場合は、必ずしも良好な結果が得られておらず、誤差が 1.0[%]以内に止まっているのは、幅厚比が  $t/a \leq 0.10$  の範囲までである。

次に、3-D 体積力モデルとの比較結果を示す図 3 を見ると、図 2 と同様に、補正係数  $\kappa$  の増大に伴って、誤差が一旦減少するものの途中から再び増加に転ずる傾向が認められる。しかしながら、図 3 においては図 2 の場合と異なり、 $\kappa=5/6$  の場合に最も良好な解析結果が得られており、幅厚比が  $t/a \leq 0.55$  の範囲で誤差 1.0[%]以内の精度が確保されている。

以上の結果から、Mindlin 理論におけるせん断補正係数は、必ずしも  $\kappa=5/6$  が最適ではなく、比較対象とする 3 次元モデルの荷重状態によって変化することが分かる。こうした結果が得られた原因は、Mindlin 理論においても平面応力場を仮定しているところにあると考えられる。平面応力場の仮定は、板厚方向の垂直応力  $\sigma_z$  をゼロと仮定したことに相当する。しかしながら、3-D 表面力モデルのように、荷重が上下面の垂直応力として作用する場合は、 $\sigma_z \neq 0$  となり、平面応力場の仮定が成立しない。

#### 5. まとめ

本研究の解析結果より、Mindlin 理論におけるせん断補正係数の値について、比較対象とする 3 次元モデルの荷重状態に応じた選択の必要性が明らかとなった。特に、等分布荷重が作用する矩形平板の場合、一定の体積力が作用している 3 次元モデルを想定した場合には  $\kappa=5/6$  を、上面に等分布荷重が作用しているモデルの場合には  $\kappa=1.0$  を選択すべきことが明らかとなった。

#### 参考文献

- 1)Reissner, E. : The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J.of Appl. Mech, 12, pp.69～77, 1945.
- 2)Mindlin, R. D. : Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J.of Appl. Mech, 18, pp.31～38, 1951.

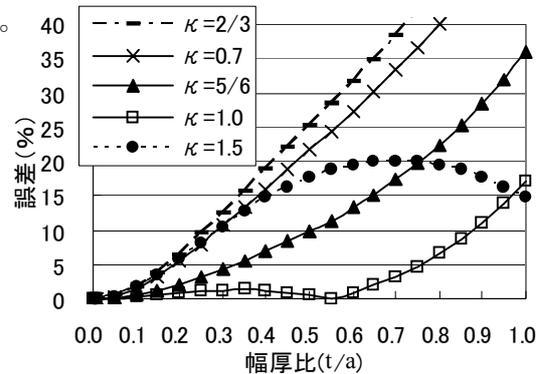


図 2. 中央点におけるたわみの誤差変化 (3-D 表面力モデルとの比較)

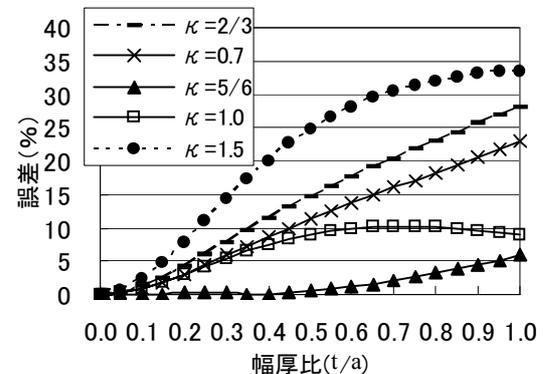


図 3. 中央点におけるたわみの誤差変化 (3-D 体積力モデルとの比較)