

Eulerian 有限要素法による大变形固体解析

中央大学 学生員 ○金子 恭久
中央大学 正会員 檜山 和男
広島大学 正会員 岡澤 重信

1. はじめに

近年、固体・構造解析において流体解析のように Euler 表記により解析する研究が行われている^{1),3)}。Lagrange 表記に対して Euler 表記は、計算要素が空間に固定されているため、その計算要素を超えて材料が移動する特徴を持つ。

本研究では、この Euler 表記での構造解析手法（以下、Eulerian 有限要素法）における精度向上を目的としている。解析手法には、operator split 法を採用し、複雑な自由表面を取扱うのに有効な手法である界面捕捉法を適用させる。界面捕捉法を取扱う上で、移流方程式を高精度に解くことは重要である。そこで本研究では、材料含有率の移流方程式の解法に安定化有限要素法を用いることの検討を行う。数値解析例として、棒の衝撃問題を取上げ、既往の手法である風上差分法¹⁾との解析結果を比較することにより本手法の有効性について考察する。

2. Euler 表記での支配方程式

図-1 に本解析のフローチャートを示す。

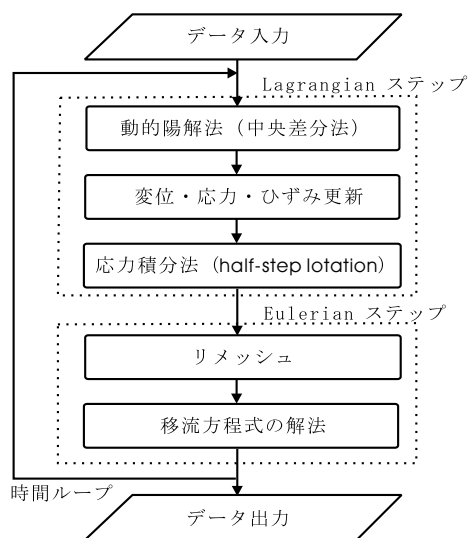


図-1 解析フローチャート

(1) operator split 法

Lagrange 表記による支配方程式は、物質時間導関数により次式のように表現される。

$$\dot{\Phi} = f \quad (1)$$

ここで上付き・は、物質導関数を表わし、 Φ は任意の変数、 f は外力項である。物質時間導関数と空間時間導関数の関係は、以下のような関係で結ばれる。

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

ここで u , x は、それぞれ現時刻での速度ベクトル、位置ベ

クトルであり、右辺第 2 項は移流項を表わす。式 (1)、(2) より Euler 表記による支配方程式は、次式で表わせる。

$$f = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3)$$

式 (3) に対して現時刻を t^n として Δt 後の時刻 t^{n+1} での挙動を求めることを考え、左辺第 1 項を次のように設定する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} \quad (4)$$

式 (4) を式 (3) に代入すると、時刻 t^{n+1} での変数 Φ^{n+1} は、以下のように求まる。

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + f \Delta t + u \Delta t \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5)$$

ここで式 (5) を次のように 2 つに分割する。

$$\Phi^{n+1*} = \Phi^n + f \Delta t \quad (6)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^{n+1*} + u \Delta t \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7)$$

式 (6) は、時間を進める Lagrangian ステップであり、*印は Lagrangian ステップ後の値を意味する。また式 (7) は、時間を止めた Eulerian ステップである。

(2) Lagrangian ステップ

[I] 動的陽解法

仮想仕事の原理式を解析領域全体で離散化した次式のような平衡方程式を考える。

$$\bar{M} \dot{u}^n + F_{int}^n = F_{ext}^n \quad (8)$$

ここで $\bar{M}$ は対角化された集中質量行列、 F_{int} は内力ベクトル、 F_{ext} は外力ベクトルを表わす。また右肩付文字 n は、現時刻であることを意味する。式 (8) に対して、中央差分法を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル x^{n+1} 及び、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $u^{n+\frac{1}{2}}$ は、次式のように評価できる。

$$x^{n+1} = x^n + u^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (9)$$

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^{n-\frac{1}{2}} + \dot{u}^n \Delta t \quad (10)$$

このとき、加速度ベクトル $\dot{u}^n$ は、式 (8) より求まる。

[II] 材料構成式

構成式は、微小変形問題において用いられる Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ と微小ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}$ を関連付ける 4 階の弾塑性構成テンソル C^{ep} を用いた次式を考える。

$$\dot{\sigma} = C^{ep} : \dot{\epsilon} \quad (11)$$

$$C_{ijkl} = 2G[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \alpha \frac{9G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}^2(H' + 3G)}] \quad (12)$$

$\alpha = 0$ (弾性) $\alpha = 1$ (塑性)

KeyWords： Eulerian 有限要素法、大変形解析、operator split 法、移流方程式

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kaneiko@kc.chuo-u.ac.jp

ここで G はせん断弾性係数, ν はポアソン比を表わす. また $\sigma', \bar{\sigma}, H'$ は, それぞれ偏差 Cauchy 応力テンソル, 相当応力, 塑性係数である. 式 (12) で示される構成関係において, 微小ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}$ は, 客観性のあるストレッチングテンソル D に, Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ は, 客観応力速度の一つである Jaumann 応力速度 $\dot{\sigma}^J$ に置き換えられるとする³⁾.

[III] 応力積分法

更新された内力ベクトル F_{int} を求めるために, 次式で示される Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ と Jaumann 速度 $\dot{\sigma}^J$ の関係を用いた half-step rotation を適用させる¹⁾.

$$\dot{\sigma}^J = \dot{\sigma} + W \cdot \sigma + \sigma \cdot W \quad (13)$$

ここに W は, スピンテンソルである.

(3) Eulerian ステップ

自由境界面を表現するために計算要素内の材料含有率を移流させる VOF (Volume of Fluid) 法を適用する. 材料含有率の移流方程式の解法に対して SUPG (Stream-Upwind/Pedrov-Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法を適用すると以下の有限要素方程式が得られる.

$$(M + M_\delta) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (N(u) + N_\delta(u)) \Phi = 0 \quad (14)$$

ここで M, N は, 係数行列であり, 下添字 δ は, SUPG 項に起因するものを表わす. 一方, 材料パラメーターにおける移流方程式の解法には, 次式で示される一次風上差分法を適用している.

$$\Phi_i = \Phi_i^* (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Phi_{i-1}^* u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (15)$$

ここで Δt は微小時間増分量, Δx は要素幅を表わす.

3. 数値解析例

(1) 解析方法

本手法の有効性を検討するために弾塑性材料の衝突解析を行う. 数値解析モデルは, 図-2 に示すように鉛直下向きに初期速度 300(m/sec) とする. 解析領域は, 縦 25 分割 × 横 15 分割の総要素数 375, 総節点数 416 の有限要素分割とする. また材料特性は, 図-3 に示されるようにバイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用し, ポアソン比は 0.28, 密度は 1710(kg/m³) である. 解析結果は, 従来の手法である Lagrange 表記における解析解と比較することにより本手法の妥当性及び, 既往の手法である風上差分法と比較することにより本手法の有効性を検討する.

(2) 解析結果

図-4 は 80 μ (sec) 後における Lagrange 解析, 本手法, 風上差分法における変形形状の違い, 図-5 は各手法における自由境界面での棒の先端変位を時系列でプロットしたものである. 図-4 をみると, 本手法は, 既往の手法である風上差分法に比べ材料含有率の不明瞭な領域が少なく, 界面を鋭敏に捉えられていることが確認できる. また図-5 より本手法は, 風上差分法と同等の, Lagrange 解析に近い変形を示しているといえる.

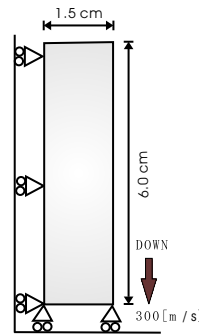


図-2 数値解析モデル

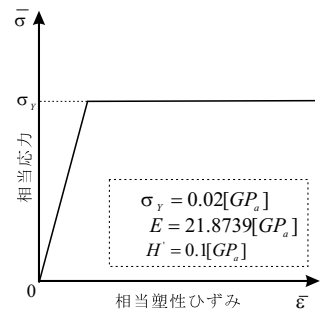


図-3 材料特性

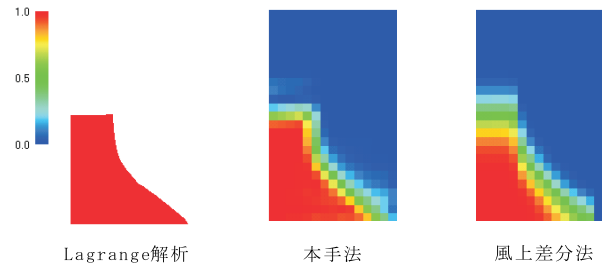


図-4 80 μ (sec) 後における変形形状

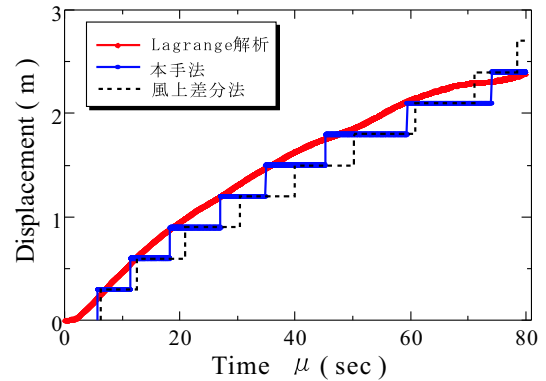


図-5 棒の先端変位における比較

4. おわりに

本報告では, Eulerian 有限要素法における精度向上のために, 材料含有率の移流方程式の解法に安定化有限要素法を適用した. 本手法は, 既往の手法である風上差分法に比べ, 界面を鋭敏にと捉え, また従来の Lagrange 解析による変形形状の結果と比べることにより妥当な解を得ることが確認できた.

今後の課題として, Eulerian ステップにおける移流方程式の解法全てに SUPG 法を適用し, 更なる精度向上, また体積保存性の検討も行っていく.

参考文献

- 1) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, Vol.6, pp151-158, 2003.
- 2) 日本数値流体力学有限要素法研究委員会: 有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp137-155, 1998.
- 3) Benson, D.J.: Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992
- 4) 社団法人 日本塑性加工学会: 非線形有限要素法, コロナ社, 1994.