空間や時間に関して積分した積分型非線形波動方程式

独立行政法人港湾空港技術研究所　正会員　柿沼太郎

1. 序　　論: 計算機の能力向上によって関数の自由度が大きくとれる変分法を適用すれば，連続体に発生する物理量を連続関数によって精度よく近似することが可能となるであろう．そこで，変分法を用いて，空間や時間に関して積分した積分型非線形波動方程式を導出する．すなわち，連成振動の考え方 (灘岡･中川, 1993) を水平方向，または，時間方向にも適用し，流体の物理量を各方向に関して連続な関数の重み付き和として表現する．そして，各方向について解析的に積分を行ない，各関数の重み関数を変数とする基礎方程式系を変分原理より導出する．ここでは，空間，または，時間に関して積分した積分型長波方程式を導く．前者に基づく解析では，空間をセルで区切ったり，各粒子を追跡するといった目的のための要素分割を必要としない．また，時間積分された後者には，時間ステップが存在しない．その代わり，物理量を表わす和の要素である各連続関数の変化，すなわち，空間的，または，時間的に連続的に変化する各成分の挙動へと方程式の離散化が行なわれている．計算精度は，実際の数値計算で用いるこれら有限個の関数の関数形と項数に依存するであろう．

2. 汎関数の定義: 非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を対象とし，速度ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}, z, t)$ を $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$, $w = \partial\phi/\partial z$ によって定義する．ここで，$\boldsymbol{u}$ 及び w は，それぞれ，各点における流速の水平方向成分ベクトル及び鉛直方向成分である．また，$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は，水平方向の微分演算子である．

水面及び底面の位置をそれぞれ $z = \zeta(\boldsymbol{x}, t)$ 及び $z = b(\boldsymbol{x}, t) < \zeta$ とし，両者がともに $\boldsymbol{x}$ の 1 価関数であるとする．質量力が重力のみであると仮定し，表面張力の効果を重力の効果に比べて無視する．また，自由水面に働く大気圧を 0 とする．いま，対象領域の $x-y$ 平面への正射影である平面 A 及び底面位置 b が既知であるとすると，求める未知変数は，速度ポテンシャル ϕ 及び水面変動 ζ となる．このとき，密度が一様な流体の運動を表わす変分問題の作用 $\mathcal{F}[\phi, \zeta]$ を次式の汎関数とする (Luke, 1967).

$$\mathcal{F}[\phi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1}\iint_A\int_b^{\zeta}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + gz\right\}dz\,dA\,dt \tag{1}$$

ここで，$(\nabla\phi)^2 \equiv |\nabla\phi|^2$ とする．g は，重力加速度である．このように汎関数を定義すると，$\mathcal{F}$ の第 1 変分が 0 であるとき ($\delta\mathcal{F} = 0$)，対象領域の任意の点における連続方程式及び Bernoulli の式, 水面における力学的境界条件，そして，水面と底面における運動学的境界条件が満たされる．

3. 長波方程式: 右図の領域 $x_0(t) \le x \le x_1(t)$, $b \le z \le \zeta(x, t)$ を対象とする．ここでは，簡単のために，b =const. とする．平面 2 次元型の方程式系を得るために鉛直分布関数を設定し，速度ポテンシャル ϕ を鉛直分布関数 $Z_\alpha(z)$ の重み付き和として次式のように表わす．

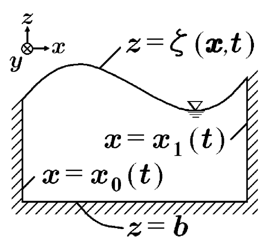

図: 流体の対象領域

$$\phi(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1}\{Z_\alpha(z)\cdot f_\alpha(x, t)\} \equiv Z_\alpha(z)\cdot f_\alpha(x, t) \tag{2}$$

いま，極浅水域を対象とし，鉛直分布関数を 1 項のみ用いることにして ($N = 1$)，$Z_\alpha \cdot f_\alpha = Z_0 \cdot f_0 = 1\cdot f_0 = f(x, t)$ とする．このとき，磯部 (1994) の方法にならい，式 (2) を式 (1) に代入して鉛直積分を解析的に行なってから，変分原理の Euler-Lagrange の方程式を求めると，次式のような非線形長波方程式が得られる．

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla\{(\zeta - b)\nabla f\} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + g\zeta = 0 \tag{3}$$

鉛直分布関数として $Z_0 = 1$ のみを用いるこの場合の鉛直積分は，鉛直方向の平均化の意味を持つ．

4. 空間に関して積分した積分型長波方程式: 次に，鉛直積分と同様にして，水平方向にも積分した長波方程式を求める．簡単のために，$x-z$ 平面内で考える．水平分布関数を設定し，速度ポテンシャルの重み関数 $f(x, t)$ 及び水面変動 $\zeta(x, t)$ をそれぞれ水平分布関数 $X^f_{\alpha^f}(x)$ 及び $X^\zeta_{\alpha^\zeta}(x)$ の重み付き和として次式のように表わす．

$$f(x, t) = \sum_{\alpha^f=0}^{N^f-1}\{X^f_{\alpha^f}(x)\cdot\xi^f_{\alpha^f}(t)\} \equiv X^f_{\alpha^f}(x)\cdot\xi^f_{\alpha^f}(t); \quad \zeta(x, t) = \sum_{\alpha^\zeta=0}^{N^\zeta-1}\{X^\zeta_{\alpha^\zeta}(x)\cdot\xi^\zeta_{\alpha^\zeta}(t)\} \equiv X^\zeta_{\alpha^\zeta}(x)\cdot\xi^\zeta_{\alpha^\zeta}(t) \tag{4}$$

キーワード：積分型非線形方程式,　変分法,　要素分割,　数値計算
連　絡　先：〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1,　Phone: 0468(44)5052,　Facsimile: 0468(44)1274

これらを $\mathcal{F}[\phi;\zeta] = \mathcal{F}[f;\zeta] = \mathcal{F}[\xi^f;\xi^\zeta] = \int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}[\xi^f;\xi^\zeta]\,dt$ に代入して，水平積分を行なう．Euler-Lagrange の方程式が式 (5) であり，これより，水平方向にも積分した積分型長波方程式が式 (6) のように得られる．

$$[\mathcal{L}]_{\xi^f_{\alpha^f}} \equiv \mathcal{L}_{\xi^f_{\alpha^f}} - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\frac{\partial \xi^f_{\alpha^f}}{\partial t}} = 0;\quad [\mathcal{L}]_{\xi^\zeta_{\alpha^\zeta}} \equiv \mathcal{L}_{\xi^\zeta_{\alpha^\zeta}} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_{\alpha^f\alpha^\zeta}\xi^\zeta_{\alpha^\zeta} - bA_{\alpha^f}) - E_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}\xi^f_{\beta^f}\xi^\zeta_{\alpha^\zeta} + bD_{\alpha^f\beta^f}\xi^f_{\beta^f} = 0;\ B_{\alpha^f\alpha^\zeta}\frac{\partial\xi^f_{\alpha^f}}{\partial t} + \frac{1}{2}E_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}\xi^f_{\alpha^f}\xi^f_{\beta^f} + gC_{\alpha^\zeta\beta^\zeta}\xi^\zeta_{\beta^\zeta} = 0;$$
$$A_\alpha = \int_{x_0}^{x_1} X^f_\alpha\,dx;\ B_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X^f_\alpha X^\zeta_\beta\,dx;\ C_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X^\zeta_\alpha X^\zeta_\beta\,dx;$$
$$D_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X^f_\alpha}{\partial x}\frac{\partial X^f_\beta}{\partial x}\,dx;\ E_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X^f_\alpha}{\partial x}\frac{\partial X^f_\beta}{\partial x}X^\zeta_\gamma\,dx \tag{6}$$

本方程式系の数値解法では，空間を有限要素に分割して各要素や格子点上に物理量を離散化する必要がない．

5．時間に関して積分した積分型長波方程式: 他方，時間方向に積分した長波方程式を求める．簡単のために，x_0 及び x_1 をともに一定値とする．$f(x;t)$ 及び $\zeta(x;t)$ をそれぞれ時間分布関数 $T^f_{\alpha^f}(t)$ 及び $T^\zeta_{\alpha^\zeta}(t)$ の重み付き和として次式のように表わす．

$$f(x;t) = \sum_{\alpha^f=0}^{N^f-1}\{T^f_{\alpha^f}(t)\cdot\tau^f_{\alpha^f}(x)\} \equiv T^f_{\alpha^f}(t)\cdot\tau^f_{\alpha^f}(x);\quad \zeta(x;t) = \sum_{\alpha^\zeta=0}^{N^\zeta-1}\{T^\zeta_{\alpha^\zeta}(t)\cdot\tau^\zeta_{\alpha^\zeta}(x)\} \equiv T^\zeta_{\alpha^\zeta}(t)\cdot\tau^\zeta_{\alpha^\zeta}(x) \tag{7}$$

同様の Euler-Lagrange の方程式より，次式のような時間に関して積分した積分型長波方程式が得られる．

$$P_{\alpha^f\alpha^\zeta}\tau^\zeta_{\alpha^\zeta} - bO_{\alpha^f} - \nabla(S_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}\nabla\tau^f_{\beta^f}\cdot\tau^\zeta_{\alpha^\zeta} - bQ_{\alpha^f\beta^f}\nabla\tau^f_{\beta^f}) = 0;$$
$$P_{\alpha^f\alpha^\zeta}\tau^f_{\alpha^f} + \frac{1}{2}S_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}\nabla\tau^f_{\alpha^f}\cdot\nabla\tau^f_{\beta^f} + gR_{\alpha^\zeta\beta^\zeta}\tau^\zeta_{\beta^\zeta} = 0;$$
$$O_\alpha = \Big[T^f_\alpha\Big]_{t_0}^{t_1};\ P_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T^f_\alpha}{\partial t}T^\zeta_\beta\,dt;\ Q_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1}T^f_\alpha T^f_\beta\,dt;\ R_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1}T^\zeta_\alpha T^\zeta_\beta\,dt;\ S_{\alpha\beta\gamma} = \int_{t_0}^{t_1}T^f_\alpha T^f_\beta T^\zeta_\gamma\,dt \tag{8}$$

本方程式系の数値解法では，時間ステップ毎に物理量を定義するという時間方向の離散化が必要ない．

6．空間及び時間に関して積分した積分型長波方程式: 簡単のために，$x-z$ 平面において考え，x_0 及び x_1 をともに一定値とする．水平分布関数と時間分布関数を設定し，式 (4) の重み関数 $\xi^f_{\alpha^f}(t)$ 及び $\xi^\zeta_{\alpha^\zeta}(t)$ をそれぞれ時間分布関数 $T^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}}(t)$ 及び $T^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}(t)$ の重み付き和として次式のように表わす．

$$\xi^f_{\alpha^f}(t) = \sum_{\alpha^{f;\alpha^f}=0}^{N^{f;\alpha^f}-1}\{T^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}}(t)\cdot\lambda^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}}\} \equiv T^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}}(t)\cdot\lambda^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}};\quad \xi^\zeta_{\alpha^\zeta}(t) = \sum_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}=0}^{N^{\zeta;\alpha^\zeta}-1}\{T^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}(t)\cdot\lambda^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}\} \equiv T^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}(t)\cdot\lambda^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}} \tag{9}$$

Euler-Lagrange の方程式より，次式のような空間と時間の両者に関して積分した長波方程式が得られる．

$$B_{\alpha^f\alpha^\zeta}P^{\alpha^f\alpha^\zeta}_{\alpha^{f;\alpha^f}\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}\lambda^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}} - bA_{\alpha^f}O^{\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}} + E_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}S^{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}_{\alpha^{f;\alpha^f}\beta^{f;\beta^f}\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}\lambda^{f;\beta^f}_{\beta^{f;\beta^f}}\lambda^{\zeta;\alpha^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}} - bD_{\alpha^f\beta^f}Q^{\alpha^f\beta^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}\beta^{f;\beta^f}}\lambda^{f;\beta^f}_{\beta^{f;\beta^f}} = 0;$$
$$B_{\alpha^f\alpha^\zeta}P^{\alpha^f\alpha^\zeta}_{\alpha^{f;\alpha^f}\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}\lambda^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}} + \frac{1}{2}E_{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}S^{\alpha^f\beta^f\alpha^\zeta}_{\alpha^{f;\alpha^f}\beta^{f;\beta^f}\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}}\lambda^{f;\alpha^f}_{\alpha^{f;\alpha^f}}\lambda^{f;\beta^f}_{\beta^{f;\beta^f}} + gC_{\alpha^\zeta\beta^\zeta}R^{\alpha^\zeta\beta^\zeta}_{\alpha^{\zeta;\alpha^\zeta}\beta^{\zeta;\beta^\zeta}}\lambda^{\zeta;\beta^\zeta}_{\beta^{\zeta;\beta^\zeta}} = 0;$$
$$A_\alpha = \int_{x_0}^{x_1}X^f_\alpha\,dx;\ B_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1}X^f_\alpha X^\zeta_\beta\,dx;\ C_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1}X^\zeta_\alpha X^\zeta_\beta\,dx;\ D_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X^f_\alpha}{\partial x}\frac{\partial X^f_\beta}{\partial x}\,dx;$$
$$E_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X^f_\alpha}{\partial x}\frac{\partial X^f_\beta}{\partial x}X^\zeta_\gamma\,dx;\ O^\alpha_\beta = \Big[T^{f;\alpha}_\beta\Big]_{t_0}^{t_1};\ P^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T^{f;\alpha}_\beta}{\partial t}T^{\zeta;\gamma}_\delta\,dt;$$
$$Q^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} = \int_{t_0}^{t_1}T^{f;\alpha}_\beta T^{f;\gamma}_\delta\,dt;\ R^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} = \int_{t_0}^{t_1}T^{\zeta;\alpha}_\beta T^{\zeta;\gamma}_\delta\,dt;\ S^{\alpha\gamma\epsilon}_{\beta\delta\eta} = \int_{t_0}^{t_1}T^{f;\alpha}_\beta T^{f;\gamma}_\delta T^{\zeta;\epsilon}_\eta\,dt \tag{10}$$

7．結　　論: 変分法を用いて，水平方向や時間方向に積分した積分型長波方程式を導いた．連続体を対象とし，未知変数は，連続関数で仮定した有限個の成分の変動に離散化し，それらを加え合わせた和として表わす．従って，数値解析の際に，空間の有限要素分割，または，時間のステップ刻みを必要としない．３次元空間と時間の両方を考慮して (3 + 1) 次元に広がる場の方程式が，鉛直積分によって (2 + 1) 次元型方程式になり，水平積分によって (0 + 1) 次元型方程式になる．更に，これを時間積分することによって，(0 + 0) 次元型方程式が得られる．今後，本方程式系の数値解析手法について，解の精度及び計算の経済性を検討する必要がある．

参考文献: 磯部雅彦 (1994), 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1–14.，灘岡和夫・中川康之 (1993), 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6–10.，Luke, J. C. (1967), J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395–397.