# 長波の数値計算における誤差特性に関する研究


防衛大学校　　学生会員　〇笠原　健治

防衛大学校　　正 会 員　　藤間　功司


## １．はじめに

従来、深海域における津波の伝播計算には線形長波理論式が支配方程式として使われてきた。しかし、近年の研究より遠地津波のように伝播時間が長い場合、波数分散効果を考慮する必要があることが分かっている。また、近地津波においても 1983 年の日本海中部地震津波のような高角断層タイプの地震では津波初期波形の波形勾配が大きく、初期波形に高波数成分の波が含まれるため波数分散性が無視できない。このような場合、波数分散性を考慮した分散波理論式を支配方程式とする必要がある。本研究では線形分散波理論式に対して staggered 配置の格子を使用した 2 種類の差分スキームについて差分方程式の厳密解を導き分散特性を検討する。差分スキームは①2 段階混合差分法および②Crank-Nicholson 法を用いた完全陰解法である。

## ２．支配方程式

本研究では波数分散性を考慮した線形 Boussinesq 式を支配方程式とする。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 N}{\partial t\partial y}\right] \qquad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 N}{\partial t\partial y}\right] \qquad (3)$$

$\eta$ ：水位　$M$ ：$x$ 方向の線流量　$N$ ：$y$ 方向の線流量　$h$ ：水深　$c_0$ ：線形長波の波速（$=\sqrt{gh}$）

式(1)は質量の保存式、式(2)および(3)はそれぞれ $x, y$ 方向の運動の式である。式(1)～(3)を 2 段階混合差分法および完全陰解法により差分化し、差分方程式をフーリエ変換することにより差分方程式の厳密解を導く。厳密解をもとに各差分スキームにおける分散特性について検討する。

## ３．差分スキーム

線形長波理論式の数値解析には Leap-Frog 法が用いられるケースが多い。Leap-Frog 法は比較的精度がよく、陽解法であるので計算時間が短い。しかし、高次項の計算の安定性、精度に問題がある。2 段階混合差分法は計算を 2 段階に分け、式(2)、(3)の高次項のみ陰解法で解いているため計算の安定性が高く計算時間もあまりかからない。完全陰解法は無条件安定である。しかし、広範な領域の計算では膨大な量の数値を扱うため計算時間・容量に問題がある。

## ４．厳密解の導出

フーリエ変換による厳密解を導出し線形分散波理論式の分散性を検討する。水位 $\eta$ および線流量 $M, N$ は格子点上で定義される離散的なものであるから フーリエ級数展開は式(4)を考えればよい。

$$\begin{bmatrix} M_{j,l}^n \\ N_{j,l}^n \\ \eta_{j,l}^n \end{bmatrix}=\sum_{\alpha=0}^{I/2}\sum_{\beta=0}^{L/2}\begin{bmatrix} \tilde{M}_{\alpha,\beta}^n \\ \tilde{N}_{\alpha,\beta}^n \\ \tilde{\eta}_{\alpha,\beta}^n \end{bmatrix} e^{ik_x j\Delta x}e^{ik_y l\Delta y} \qquad j=0,1,2\cdots I/2 \qquad l=0,1,2\cdots L/2 \qquad (4)$$

---


キーワード　線形分散波理論，差分スキーム，厳密解，波数分散性，$K$ および $r$



連絡先　〒239‐8686　神奈川県横須賀市走水 1‐10‐20　防衛大学校建設環境工学科　ＴＥＬ0468‐41‐3810

E-mail:s7117@ed.nda.ac.jp

$\tilde{M},\tilde{N},\tilde{\eta}$ は有限フーリエ級数であり、時間の関数である。また、$J,L$ はそれぞれ $x,y$ 方向の格子点数である。2 段階混合差分法および完全陰解法によって式(1)～(3)を差分化し、差分方程式に式(4)を代入する。各方程式を連立させ $M,N$ を消去しη のみの式にして常差分方程式を導くと、$e^{-ikcn\Delta t}$ の形の厳密解が得られる。波速は 2 段階混合差分法では式(5)、完全陰解法では式(6)のようになる。

$$\frac{c}{c_0}=\frac{1}{\sqrt{(\omega_x K_x)^2+(\omega_y K_y)^2}}\cdot\sin^{-1}(S_M) \quad (5) \qquad \frac{c}{c_0}=\frac{1}{2\sqrt{(\omega_x k_x)^2+(\omega_y k_y)^2}}\cos^{-1}\left(\frac{2-F}{F}\right) \quad (6)$$

$$K_x=c_0\frac{\Delta t}{\Delta x} \quad K_y=c_0\frac{\Delta t}{\Delta y} \quad \omega_x=\frac{k_x\Delta x}{2} \quad \omega_y=\frac{k_y\Delta y}{2} \quad k_x,k_y：x,y\text{方向の波数} \quad c：\text{計算波速}$$

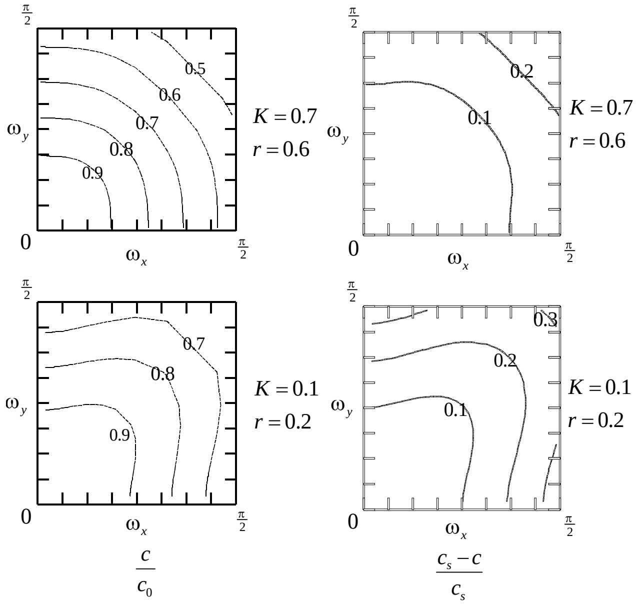
$S_M,F$ は差分スキームに特有の関数であり courant 数および水深と計算の格子間隔の比 $r\,(=h/_{\Delta x})$をパラメータとする。式(5)、(6)より数値計算による波速は差分格子長 $\Delta x,\Delta y$ に関する波数分散性を有することがわかる。

## ５．分散特性の検討

(5)および(6)において $K$ を 0.1,0.5,0.7 $r$ を 0.2,0.4,0.6,0.8 と変化させ分散特性を検討した。なお、本研究では $\Delta x=\Delta y$ とする。図－1 は $K=0.7,r=0.6$ の場合および $K=0.1,r=0.2$ の場合の分散特性を示したものである。本研究では様々な $K,r$ について分散を検討した。その結果、2 段階混合差分法では 1. 計算が安定する範囲内で $K$ を大きくとることで誤差を抑えることができる 2. $r$ を大きくすると分散の指向性が少なくなる ことがわかった。完全陰解法では 1. $K$ が分散の指向性に影響し、$K$ を大きくすることで分散の指向性を少なくすることができる。2. $r$ は指向性にも影響を与えるが主に分散の大きさに影響を及ぼす ことがわかった。2 段階混合差分法において適当な $K$ および $r$ を与えることで分散の大きさ、指向性を抑えることができた。

**$K$＝0.7 $r$＝0.**6 のときが最も精度がよい。

図－1 の右段は線形分散関係式の波速を真値とした計算波速の誤差を評価したものである。図より $K=0.1,r=0.2$ の場合、45°方向に分散が弱く、$x,y$ 軸方向に分散が強いという指向性があることがわかる。一方、$K=0.7,r=0.6$ では分散の指向性は極めて少なく、かつ線形分散関係式の波速との誤差も小さいことがわかる。




図－1 2 段階混合差分法の波数分散性

## ６．おわりに

本研究では Boussinesq 式を支配方程式とし線形分散波理論の分散特性について検討した。なかでも、計算の精度、計算時間において有効である 2 段階混合差分法の検討を行った。本スキームでは計算の支配パラメータである $K,r$ を適当に取ることで分散の指向性、誤差を抑えることが可能であることがわかった。$K=0.7,r=0.6$ 程度とすることが望ましい。

## 参考文献


1) 今村文彦,後藤智明：土木学会論文集第 375 号／Ⅱ－6

2) 佐山順二,今村文彦,後藤智明,首藤伸夫：第 34 回海岸工学講演会論文集 p.177～181

3) 立川敬士,後藤智明,服部昌太郎：海岸工学論文集第 43 巻 p.1～5

**4)** 岩瀬浩之,見上敏文,後藤智明,藤間巧司：土木学会論文集 No.705／Ⅱ－59,129－138