幅の変化する水路（狭窄・拡幅）を流れる不等流の水面形の解析解

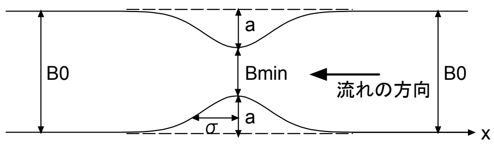
中央大学理工学部　　学生員　○髙木　隆一
水資源開発公団　　正会員　　佐藤　直良
中央大学理工学部　　正会員　　山田　正

１.はじめに

河川行政における治水上の問題点の１つに，狭窄水路における上流方向のせき上げ背水が挙げられる．本研究では，数値計算により幅の変化する水路（狭窄・拡幅）を流れる不等流の水面形を，定性的かつ定量的にとらえると共にその基本式を解析的あるいは近似的に解くことにより，”水面形の解析解”を導いた．これらより水路狭窄部が水面形に及ぼす影響を調べた．

２.狭窄水路を流れる不等流の水面形を求める数値計算

Runge-Ktta-Gill 法を用いて Manning の粗度係数 n=0.04m$^{-1/3}$s，水路床勾配 i=0.001 で, 幅の変化する矩形水路内の流れ（流量 Q=1000m^3/s）の水面形（つまり水深）を求める．以下に計算条件を挙げる．(条件 1)計算区間全範囲において，流れは定常であるとし，計算は流れの下流端から上流方向へと進む．(条件 2)図－１に水路概略を示す．水路壁面は正規分布曲線によって与え，水路は左右対称とする．また次のように σ，X_0 の各値を与える．X_0；計算開始位置から最小幅位置までの距離[m]，σ；最狭部から変曲点までの距離[m]．(条件 3)計算水深の初期値 h_0 [m]は，一様水路幅部分の等流水深 h_n [m]で与える．(条件 4).水路の勾配 i は，全範囲で一定とする．



図－1　水路の平面図と記号の定義

２－１．数値計算に用いる基本方程式

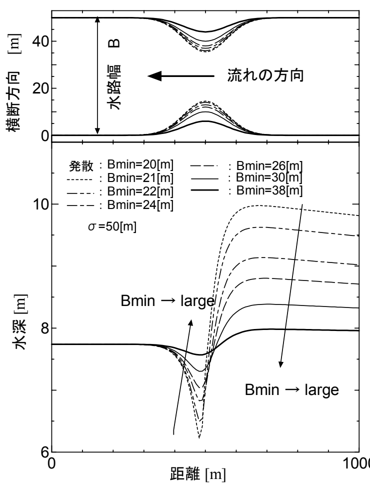
矩形断面水路で水路幅 B が変化する場合の不等流の基本式は，上流方向に x 軸の正の向きをとると(1)式となり，B を(2)式，dB/dx を(3)式で与え，(1)，(2)，(3)式をまとめると，(4)式となる．

$$\frac{dh}{dx}=\frac{-i+\dfrac{n^2Q^2}{R^{4/3}A^2}+\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{dB}{dx}}{1-\dfrac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \tag{1}$$

$$B=B_0+2ae^{\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{(2\sigma)^2}\right\}} \tag{2}$$

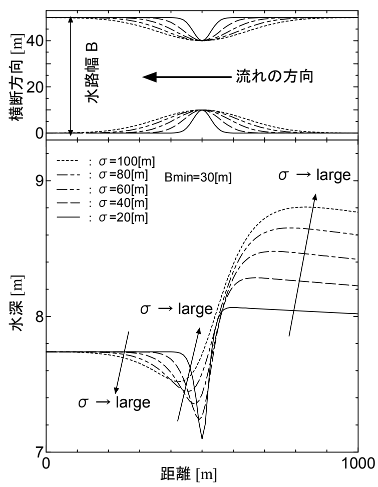
$$\frac{dB}{dx}=2ae^{\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{(2\sigma)^2}\right\}}\cdot\left\{-2(x-x_0)/(2\sigma)^2\right\} \tag{3}$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{-i+\dfrac{n^2Q^2}{R^{4/3}A^2}+\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}h\left[-\dfrac{a(x-x_0)}{\sigma^2}\cdot e^{\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{(2\sigma)^2}\right\}}\right]}{1-\dfrac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \tag{4}$$



図－２　狭窄水路を流れる不等流の水面形（B_{min} 変化）

B_{min} が小さくなるほど,せき上げ量は大きくなり,最低水深も浅くなる.



図－３　狭窄水路を流れる不等流の水面形（σ 変化）

σ が大きいほど,せき上げ量は大きく,また最低水深は上がる.

２－２．数値計算の結果，及びその考察

狭窄水路においての水面形の変化形態は, 流れの上流方向からたどって, 狭窄部に達するまでの一様水路部分で徐々に水深は上がってゆき, 狭窄部との接合点付近で最大水深をとる．その後, 幅が狭くなるに従って水深は下がり, 最狭部付近で最小水深となる. そして幅が広がってゆくにつれて水深は上がり, 一様水路部分に達した時点で等流水深となり一定となる. また，狭窄部の形状による影響は，**図－２**のように，最狭部の水路幅（B_{min}）を変化させた場合，B_{min} が小さくなるほど,せき上げ量は大きくなり,最低水深も浅くなる．狭窄の存在による流れへの影響は, **図－３**のように, σ が大きいほど,せき上げ量は大きく, 最低水深は上がる．また，**図－４**のように，最狭部（B_{min}），最大水深（h_{max}）を無次元化し関係を調べると，同じ B_{min}/B_0 である場合，σ が大きいほど，h_{max}/h_0 は大きくなる．しかし，**図－４**の曲線の勾配については，B_{min}/B_0 を減少させるにつれ，σ それぞれの曲線の勾配は大小関係が逆転する．この変化や傾きも，**図－２**，**図－３**から得られた，B_{min} が小さくなるほど，また，σ が大きくなるほど，せき上げ量が大きくなるという結果に加え，水路狭窄部がせき上げ背水に及ぼす影響に大いに関係しているのではないかと考える．

３．水面形の解析解

水面形の解析解を得るため，まず摩擦を考慮しない解（基本式(4)式の分子 1, 2 項無視に相当）を求め，この解と数値計算により求まった曲線との比較を行う．

キーワード　不等流，狭窄水路，数値計算，水面形の解析解
連絡先　〒112-8551　東京都文京区春日 1-13-27　中央大学理工学部土木工学科　ＴＥＬ03-3817-1805　ＦＡＸ03-3817-1803

３－１．解析解の導出

幅の変化する矩形水路での定常流を考えると,連続式は(6)式,運動方程式は(7)式のように表される.また,等流状態の流れに対して,水深及び流速の微小な変化を考慮し,水深 $h=h_0+h'$,流速 $v=v_0+v'$ と置き,それぞれ（6)式,（7)式に代入することにより,(8)式,(9)式を得る（この時,微小項 v' の 2 乗の微分は無視する）.簡単化のため(9)式における水路勾配 i と摩擦損失勾配 I_f について, $i-I_f=0$ と置き整理し(8)式に代入,また, v' と η は x のみの関数より v' が求まり, v' を(8)式に代入し,(10)式を得る.この式を解くと(11)式が求まり,これを解析解（$i-I_f=0$）とする.

$$\frac{\partial(Bhv)}{\partial x}=0 \tag{6}$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{\partial h}{\partial x}=i-I_f \tag{7}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}(h_0+\eta)(v_0+v')+\frac{\partial \eta}{\partial x}B(v_0+v')+\frac{\partial v'}{\partial x}B(h_0+\eta)=0 \tag{8}$$

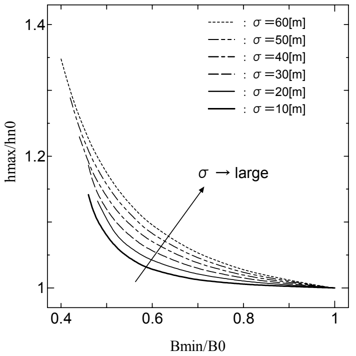
$$\frac{v_0}{g}\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial x}=i-I_f \tag{9}$$

$$\frac{dB}{dx}(h_0+\eta)\left(v_0-\frac{g}{v_0}\eta\right)+\frac{d\eta}{dx}\left\{B\left(v_0-\frac{g}{v_0}\eta\right)-\frac{g}{v_0}B(h_0+\eta)\right\}=0 \tag{10}$$

$$\eta=\frac{{v_0}^2}{g}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{v_0}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{{F_{r0}}^2}+1\right)^2-4\cdot\frac{1}{B_*}\cdot\frac{1}{{F_{r0}}^2}}\right)\right\} \tag{11}$$

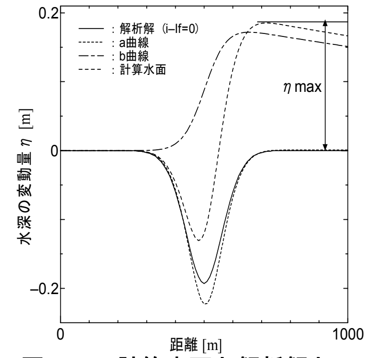
$$m=\frac{g}{v_0}h_0+v_0 \quad , \quad B_*=B/B_0 \quad , \quad F_{r0}=\frac{v_0}{\sqrt{gh_0}}$$

解析解は(11)式中にある（±）の部分において（－）を用いる.この理由として,（＋）の場合には η の初期値が 0 にならず,また水面形の変化形態が常流の場合に適さない.



図－４　無次元化した最狭部と最大水深の関係

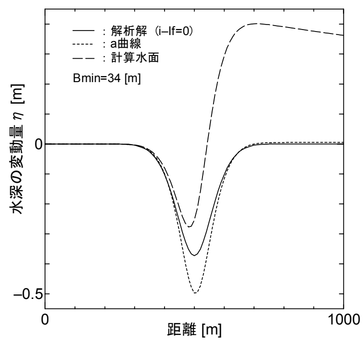
（同じ B_{min}/B_0 である場合，σが大きいほど，h_{max}/h_0 は大きくなる．また，B_{min}/B_0 を小さくしていくと，σそれぞれの曲線の勾配は大小関係が逆転す）



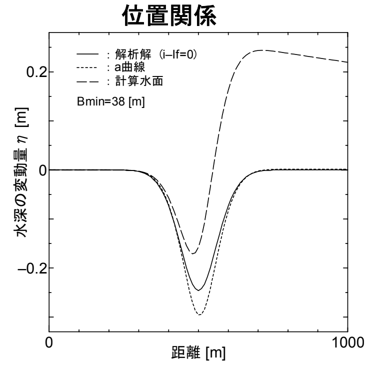
図－５　計算水面と解析解との位置関係

３－２．解析解に関する考察

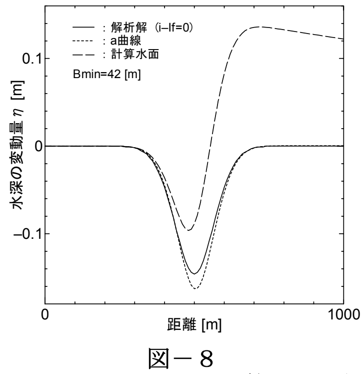
当初の方向性として,図－５（B_{min} =49[m], σ =50[m]）に示すように，(4)式の分子 1,2 項無視の曲線（以下 a 曲線）と分子 3 項目無視の曲線（以下 b 曲線）を用いて水面形の曲線を表す,ということがあった.今回得られた解析解（$i-I_f=0$）も目標としては a 曲線そのものを求めるつもりで導いたものであった.しかし, B_{min}（σ=50[m]）のみを変化させた**図－６，７，８，９**を見ると，解析解と a 曲線にどれも違いがみられた.この理由として,4 つの図面を比較すると B_{min} が大きくなるにつれて，解析解と a 曲線の η の相対的な差が小さくなることから，解析解導出の過程において, v'^2 の微分項を消去し，近似を行ったためではないかと考える.流速 v は,狭窄によって流速が変化して射流に近づくと,一様水路部分の流速 v_0 に較べてかなり速くなる.すると $v=v_0+v'$ とした場合の v' を微小項としてみなす事が出来なくなる.



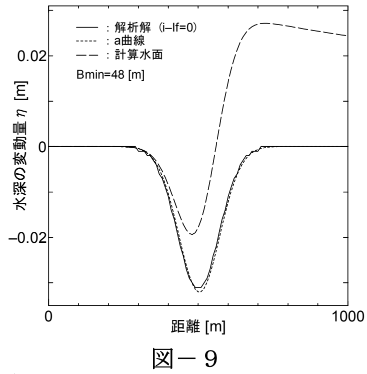
図－６



図－７



図－８



図－９

計算水面と解析解との比較

（すべての解析解と a 曲線に違いがみられたが， η の相対的な差は B_{min} が大きいほど，小さい.）

４．まとめ

数値計算を行った結果，狭窄部により上流方向へせき上げ背水が起こる現象をとらえ，また狭窄形状による量的な変化を調べる事でせき上げ背水への水路狭窄部の影響知るためのいくつかの術として，1) B_{min} が小さくなるほど,せき上げ量は大きくなり,最低水深も浅くなる. 2) σが大きいほど,せき上げ量は大きく，また最低水深は上がる. 3) 同じ B_{min}/B_0 である場合，σが大きいほど，h_{max}/h_0 は大きくなる．また，B_{min}/B_0 を小さくしていくと，σそれぞれの曲線の勾配は大小関係が逆転する．と言う結果を得る事ができた.また，摩擦を考慮しない解析解と a 曲線の η を比較をする事により， v' は水面形状に大きな影響を及ぼす事がわかり，解析解の導出において v' を十分に考慮した計算を行う必要性を知るに至った.

参考文献：椿東一郎：水理学Ｉ，森北出版, pp.132－160