降雨流出現象における非線形性と流出特性に関する研究

中央大学理工学部　学生員　○呉　修一　中央大学大学院　学生員　土屋　修一
中央大学理工学部　正会員　山田　正

1.はじめに：著者らはこれまでに山地流域における降雨流出計算手法を提案してきた．本研究では，様々な降雨流出形態に対応させるため運動則を一般化しつつ集中化した降雨流出計算手法を提案する．また，降雨流出現象において見られる非線形性の特性につい調べた．

2.単一斜面における降雨流出の基礎式の導出：様々な流出形態に対応させるため一般化された運動則を(1)式とし，連続式は(2)式で表す．(1)式を(2)式へ代入し q について整理すると(3)式の Kinematic Wave 方程式が得られる．ここに，v：断面平均流速[mm/hr]，h：湛水深[mm]，$q(t)$：単位幅流量[mm²/hr]，$r(t)$：有効降雨量[mm/hr]，α，m は流域の流出特性を表すパラメータである．直接流出は流出寄与域(河道及び河道近傍の湿潤領域)のみからの流出と考えると，(4)式の変数分離形の近似式が仮定できる．ここに，q_*：流出高[mm/hr]である．斜面長 L の末端で考え $x=L$ とすると(3)式は(5)式の常微分方程式に変形できる．

$$v=\alpha h^m,\quad q=vh=\alpha h^{m+1}\quad (1),\qquad \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r(t)\quad (2),\qquad \frac{\partial q}{\partial t}+aq^{\frac{m}{m+1}}\frac{\partial q}{\partial x}=aq^{\frac{m}{m+1}}r(t)\quad (3),\qquad q(x,t)\cong xq_*(t)\quad (4)$$

$$\frac{dq_*}{dt}=a_0q_*^{\beta}(r(t)-q_*)\quad (5),\qquad a=(m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}},\quad a_0=aL^{\beta-1}=(m+1)\alpha^{\frac{1}{m+1}}L^{\frac{-1}{m+1}}\quad (6),\qquad \beta=\frac{m}{m+1}\quad (7)$$

(5)式は一般化された単一斜面からの降雨流出を表す基礎式となる．以後本論分において(5)式を集中定数系方程式と呼ぶ．

3.不飽和浸透理論と Kinematic Wave 方程式の関係：前節で導出した集中定数系方程式中のパラメータで流域の流出特性を表す α,m は決定されてない．そこで土壌特性との関係を検討する．不飽和領域での土中水の浸透は(8)式の Richards の方程式で表される．ここに，Ψ：圧力水頭，ω：斜面勾配，c：比水分容量，k：透水係数である．鈴木(1984)によると土層の厚さに比べて斜面の長さが十分に長いとき，式(8)は右辺第 2 項と第 1 項の $\partial\psi/\partial x$ を無視しても流量の逓減曲線はほとんど変化しない．そのため(8)式は z 方向に積分することにより一次元化され，(9)式を得る．ここに，D:表層土層厚，$\overline{\theta}$:z 方向に平均化した含水率，$\overline{k}$:z 方向に平均化した透水係数である．次に窪田(1988)らにならいダルシーの法則を不飽和領域に拡張したものを用いて，単位幅流量 q に関して式変形すると(10)式を得る．ここで透水係数と有効飽和度の関係には(11)式の一般化 Kozney 式を用いた．また，含水率θと有効飽和度 S_e の関係を式(12)に示す．ここに，k_s:飽和透水係数，γ:透水性を表す無次元パラメータ，w：有効空隙率である．次に，(1)式を(2)式へ代入すると(3)式の Kinematic Wave 方程式と等価である(13)式を得る．

$$c\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\sin\omega\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{k\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+\cos\omega\right)\right\}\quad (8),\qquad D\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}=-D\sin\omega\frac{\partial\overline{k}}{\partial x}+r(t)\quad (9)$$

$$D^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}wk_s^{-\frac{1}{\gamma}}\sin\omega^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\partial q^{\frac{1}{\gamma}}}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r(t)\quad (10),\qquad k=k_sS_e^{\gamma}\quad (11),\qquad \theta=S_e\cdot w+\theta_r\quad (12),\qquad \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m+1}}\frac{\partial q^{\frac{1}{m+1}}}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r(t)\quad (13)$$

$$\gamma=m+1\quad (14),\qquad \alpha=\frac{k_s\sin\omega}{D^{\gamma-1}w^{\gamma}}\quad (15),\qquad \beta=\frac{m}{m+1}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\quad (16),\qquad n=\frac{D^{\gamma-1}w^{\gamma}}{k_s},\quad p=1\quad (17)$$

(10)式と(13)式は同一の現象を異なる二つの観点から見た等価な式であり，両式を比較することにより(14)，(15)式が得られ流出パラメータ α,m は土壌特性より表現することができる．また,この比較より基礎式中のβを不飽和領域の透水性を表すパラメータγで(16)式のように表すことができる．ここで，斜面の断面平均流速を *Manning* 型の式 $v=n^{-1}i^ph^m$ で表すと，等価粗度係数 n は土壌特性を用いて(17)式であらわすことができる．ここで特筆すべきことは従来実測に合うように決定されてきた等価粗度係数 n が(17)式に示すように土壌特性（表層土層厚 D，飽和透水係数 k_s，有効空隙率 w，透水性を表す無次元パラメータ γ）から表現されているということである．

4.流出パラメータの物理特性：流出形態が飽和ダルシー則，*Manning* 則，層流表面流，不飽和浸透流であるとしてβの値を推定する．運動則が飽和ダルシー則であるとすると(1)式中の m=0 より(7)式を用いてβ=0，Manning 則であるとすると m=2/3 よりβ=0.4，層流表面流であるとすると m=2 よりβ=0.7，不飽和浸透流であるとするとγの値は土質，土壌条件によって 3～10 までの幅広い値をとるので(16)式よりβ=0.6～0.8 となる．以上より流出パラメータβは 0～1 位の値をとることがわかる．

5.流出量逓減部の表現式：流出量逓減部を表現するため，時間 t は降雨が止んだ時点を原点とし $r(t)$=0 とおくと，(5) 式は (18) 式の変数分離形となりβ≠0，初期条件 $q_*(0)=q_{*0}$ より（19）式が得られる．ここで，様々な流出形態が混在しているので集中化するとβ=0.5(m=1)をとるとすると，(19) 式は（20）式のようになる．また，流出形態が飽和ダルシー則であるとしてβ=0，初期条件 $q_*(0)=q_{*0}$ とすると，(18) 式は（21）式のようになる．

$$\frac{1}{q(t)^{\beta+1}}\frac{dq_*(t)}{dt}=-a_0\quad (18),\qquad q_*(t)=\frac{q_{*0}}{(1+a_0\beta q_{*0}^{\beta}t)^{1/\beta}}\quad (19),\qquad q_*(t)=\frac{q_{*0}}{(1+1/2\,a_0\sqrt{q_{*0}}\cdot t)^2}\quad (20),\qquad q_*(t)=q_{*0}\exp[-\frac{1}{a_0}t]\quad (21)$$

(20)式，(21)式は高木(1966)らにより理論的に導かれた不圧逓減式，被圧逓減式と全く同じ式である．このように，異なる流れ場に適用される方程式形から全く同じ逓減式が導かれていることが非常に興味深い．本研究の一連の解析により，流域地質の影響要因の物理的特性は(15)式に示す勾配 ω，表層土層厚 D，飽和透水係数 k_s，有効空隙率 w，透水性を表す無次元パラメータ γ 及び地形特性により決定されることがわかり，流量観測によりハイドログラフの逓減部をとらえることができれば，回帰することにより逓減係数を求められ，そのことにより流域の水文諸量の推定が原理的には可能となった．

6.降雨流出を表す集中定数系方程式の解析解：本研究で用いる降雨流出を表す集中定数系方程式は非線形方程式である．一般的に非線形方程式はある限られた条件の下のみに解析解を求めることができる．本論文で用いる集中定数系方程式はβ=1 という条件の下に解析解を求めることができる．β=1 のとき(5)式を変形すると(22)式の Bernoulli 型の微分方程式形となる．この微分方程式の解析解は初期流量を $q_*(0)=q_{*i}$ とおいたとき(23)式で示される．解析解は指数関数の中に降雨の積分値が入りこんでおり，降雨の履歴効果が非線形的に表現されている．一方初期条件も単純な関数形ではなく分数形で表されており，初期条件のもつ非線形効果を陽に見出すことができるなど興味深い結果になっている．

キーワード：非線形現象，山地小流域，流出解析手法
連絡先：東京都文京区春日 1-13-27 中央大学理工学部土木工学科・tel03－3817－1805・fax03－3817－1803

$$\frac{dq_*(t)}{dt} - a_0 r(t) q_*(t) + a_0 q_*(t)^2 = 0 \quad (22)$$

$$q_*(t) = \frac{q_{*i} e^{a_0 \int_0^t r(t) dt}}{q_{*i} a_0 \int_0^t e^{a_0 \int_0^t r(\tau) d\tau} dt + 1} \quad (23)$$

7.降雨流出現象における非線形性の特性：一般に山地流域からの降雨流出現象は非線形性を示すと言われている．しかしながら，非線形性を示す要因と非線形現象の特性について本質的に調べた例は少ない．そこで，本論文では集中定数系方程式に sin 関数で降雨を与え，表層土層厚 D=20cm，斜面長 L=10m，飽和透水係数 k_s=0.0035cm/s，有効空隙率 w=0.42，勾配 i=20°，透水性を表す γ=5 を基本とし計算を行ない，降雨流出過程の非線形現象の特性を調べた．

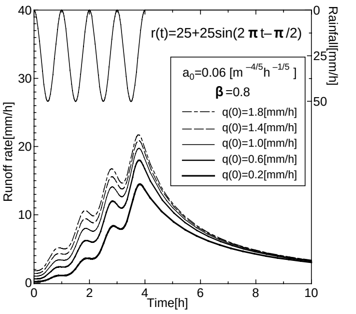

図-1 初期流出高と流出高の関係

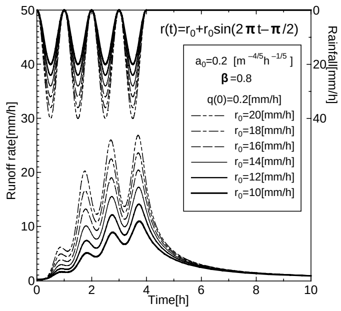

図-2 降雨強度と流出高の関係

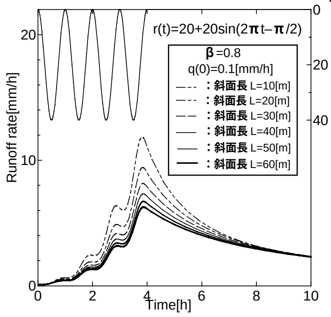

図-3 斜面長と流出高の関係

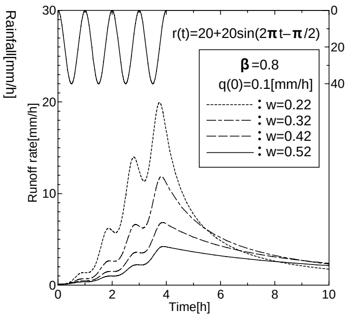

図-4 有効空隙率と流出高の関係

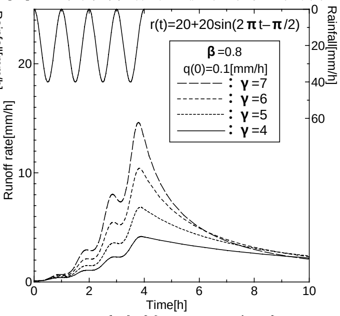

図-5 透水性を示す無次元パラメータγと流出高の関係

7.1.降雨前の土壌の初期水分量に対する非線形性：土壌の初期水分量の条件による流出高の変化を見るため，初期流出高を変化させて計算した結果を**図-1** に示す．初期流出高を単純に増加させたとしても，流出量はそれに比例して増加せず，非線形的に増加していることがわかる．また，初期流出量の増加，時間の経過に従い，ハイドログラフは一定曲線へ収束していることがわかる．このことはまさに降雨流出現象における土壌の初期水分量に対する非線形性といえるであろう．

7.2.降雨強度に対する非線形性：古くから雨の降り方によって，河川流量の増加の仕方が異なることは一般的に言われてきた．そこでここでは降雨強度を変化させて計算を行なった，その結果を**図-2** に示す．線形理論では降雨強度を 2 倍にすれば流出高のピーク値も 2 倍になる．しかし計算結果では降雨強度を 2 倍にしたところ，流出高のピーク値は単純に 2 倍になるのではなく 3 倍近くになっており，流出高は降雨強度と線形関係にはない．これは降雨流出現象における降雨強度に対する非線形性といえるだろう．

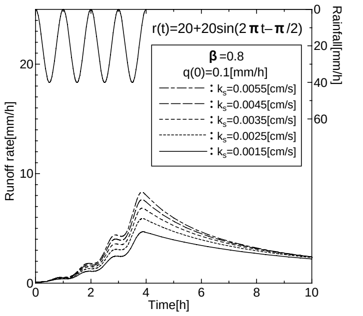

図-6 飽和透水係数と流出高の関係

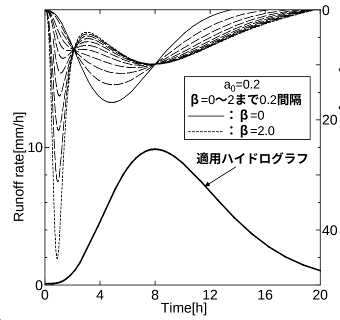

図-7 降雨の逆解析より求めたハイエトグラフ

7.3.斜面長に対する非線形性：次に斜面長を変化させた時の流出高の変化を見た．計算で求めているのは流出高[mm/h]であり線形理論では斜面長は流出高に影響しない．しかし，**図-3** を見ると斜面長の増加に伴い流出高のピーク値は減少し，時間の経過とともに一定曲線に収束していくことがわかる．これは降雨流出現象における斜面長に対する非線形現象と言えるだろう．

7.4.土壌特性の空間分布に対する非線形性：最後に山地流域のもつ空間的な土壌特性の違いが流出高に及ぼす影響を見るため有効空隙率 w，透水性を表すγ，飽和透水係数 k_s を変化させて計算した結果を**図-4,5,6** に示す．本論分中の(15)式からもこれらに対して非線形性が現れる事がわかる．計算結果より飽和透水係数に比べ有効空隙率，透水性を表すγの違いにより流出高に大きな違いが生じる事がわかる．ここで有効空隙率 w が小さい程流出高が大きくなるのは(11),(12)式からわかるように w が小さい程透水係数が大きくなるためである．これらのことから降雨流出現象における非線形性が有効空隙率，透水性を表すγ，飽和透水係数等の土壌特性の流域における空間分布からも生じることがわかる．

8.ハイドログラフからの降雨の逆解析：ハイドログラフより降雨を逆解析で求めることを試みる．集中定数系方程式(5)式を変形すると(24)式のように降雨関数を表すことができる．ここで与える流出高は(25)式で表されるガンマ分布形で与えた．この計算で求めた降雨のハイエトグラフを**図-7** に示す．興味深いことに，初期に非常に大きなピークを示した後，再度増加を迎える場合がある．これは，流出成分にも 2 成分が(見かけ上)存在するように見える．次に，求めた降雨関数を再度，集中定数系方程式に代入し流出高を計算するとパラメータの要因が無くなり，いかなるパラメータを用いても適用ハイドログラフと同形の形状を示す．この状況で 3 時間以降を無降雨，3 時間までを無降雨とした場合のハイドログラフを**図-8** に示す．線形理論では重ね合わせが可能であり二つのハイドログラフの重ね合わせは，連続して雨を降らした場合と同型となる．**図-8** を見ると方程式が線形となるβ=0 の時は重ね合わせると適用ハイドログラフと同形となるが，非線形である場合は降雨の足し合わせがきかない事が確認できる．以上のことから，従来から提唱されているハイドログラフの地下水，中間流，表面流成分への流出成分分離は各成分の重ね合わせが成立する事が前提なので，降雨流出現象が厳密に非線形性を示すならこの考え方は成立しないと思われる．又，**図-7** の結果より表面流出成分中にも複数成分が存在するとも考えられるので，ハイドログラフの線形成分分離は厳密には成立不可であり，非線形成分分離が必要となる．

$$r(t) = q_*(t) + \frac{1}{aq(t)_*^{\beta}} \frac{dq_*(t)}{dt} \quad (24), \quad q_*(t) = \frac{100(t/\lambda)^{k-1} e^{(-t/\lambda)}}{\lambda \Gamma(k)}, \quad \lambda = 2, \quad k = 5 \quad (25)$$

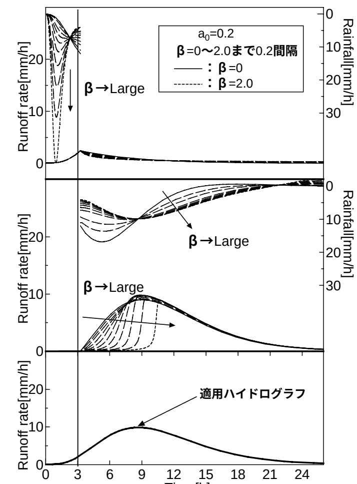

図-8 降雨を分割して与えた場合のハイドログラフ