

密度成層が地形周辺流れに及ぼす影響の数値的考察

中央大学 学生員 ○倉橋 哲弘
中央大学 学生員 清水 隆博
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

本報告は、地形風において密度成層の度合いが流れ場に及ぼす影響を数値解析により考察するものである。基礎方程式は Boussinesq 近似を仮定した Navier-Stokes 方程式を用い、数値解析手法は安定化手法の一つである SUPG/PSPG 法に基づく有限要素法を用いた。数値解析例として 2 次元半円柱周り流れ解析を取り上げ、幾つかの成層度の下で解析を行い、既存の実験・解析結果との比較により、密度成層が地形周辺の流れに及ぼす影響の考察を行った。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

鉛直方向に一定な密度勾配 ($\frac{d\rho}{dz} = -1$) を持つ 2 次元圧縮流れ場において、Boussinesq 近似¹⁾ を仮定した Navier-Stokes 方程式、連続式、密度方程式はそれぞれ式 (1),(2),(3) の通り定められる。いずれも無次元化されている。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{Fr^2} \rho k = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = u_i k. \quad (3)$$

上式において、 u_i は流速、 p は圧力、 ρ は同じ高さにおける無限上流での基本場 $\rho_B(z)$ からの密度のずれを表す。また、 $Re(= \frac{UL}{\nu})$ は Reynolds 数、 $Fr(= \frac{U}{NL})$ は Froude 数、 $N(N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz})$ は Brunt-Väisälä 振動数を表す。また、 Fr と成層度 K との間には、 $Fr = \frac{H}{\pi KL}$ なる関係がある。

(2) 有限要素方程式の導出

基礎方程式 (1),(2),(3) に対して、移流卓越・圧力振動を抑えるための安定化有限要素法 (SUPG/PSPG 法²⁾) を適用し、更に P1/P1 (流速・圧力双 1 次) 要素を用いて補間を行うことにより、以下に示す有限要素方程式を得る。

$$(M + M_\delta) \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left\{ K(u_j) + K_\delta(u_j) + \frac{1}{Re} S \right\} u_i - (C - C_\delta) p + (M + M_\delta) \rho k = 0, \quad (4)$$

$$C^T u_i + M_\epsilon \frac{\partial u_i}{\partial t} + K_\epsilon(u_j) u_i + C_\epsilon p + M_\epsilon \rho k = 0, \quad (5)$$

$$(M + M_\delta) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{ K(u_i) + K_\delta(u_i) \} \rho - (M + M_\delta) u_i k = 0. \quad (6)$$

上式において、 M, C, K, S は係数行列であり、 δ, ϵ はそれぞれ SUPG, PSPG 項に属することを示している。

更に、(4),(5),(6) 式における時間微分項を前進差分近似し、Crank-Nicolson 法を用いて得られた連立 1 次方程式を、各時間ステップごとに解く。連立 1 次方程式の解法には、(4),(5),(6) 式いずれも非対称行列であることから、Bi-CGSTAB2 法を用いた。

3. 2 次元半円柱周りにおける数値流体解析

(1) 計算条件

数値解析例として、地形の単純化モデルである 2 次元半円柱周りの解析を行った。解析領域および境界条件は、図-1 の通りに設定した。計算条件として、表-1 に示す $K(Fr)$ を適用した。解析に用いた有限要素分割は図-2 に示す通りであり、総節点数 14531、総要素数 28213、最小分割幅 $0.012h$ である。微小時間増分 Δt 及び Reynolds 数 Re は、それぞれ $\Delta t = 0.01$, $Re = 2000$ を用いた。

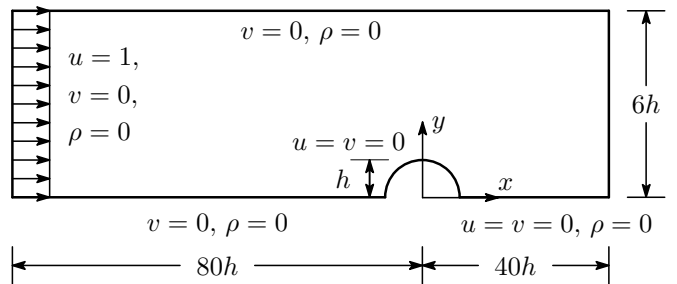


図-1 解析領域及び境界条件

表-1 計算条件

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
成層度 K	0.02	0.5	1.0	1.8	2.5	3.5
Froude数 Fr	100	3.82	1.91	1.06	0.76	0.55

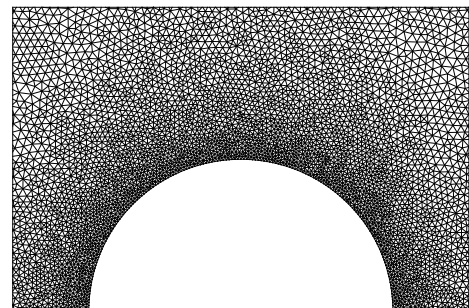


図-2 有限要素分割図（半円柱近傍）

KeyWords： 有限要素法, SUPG/PSPG 法, 地形風解析, 密度成層

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1803

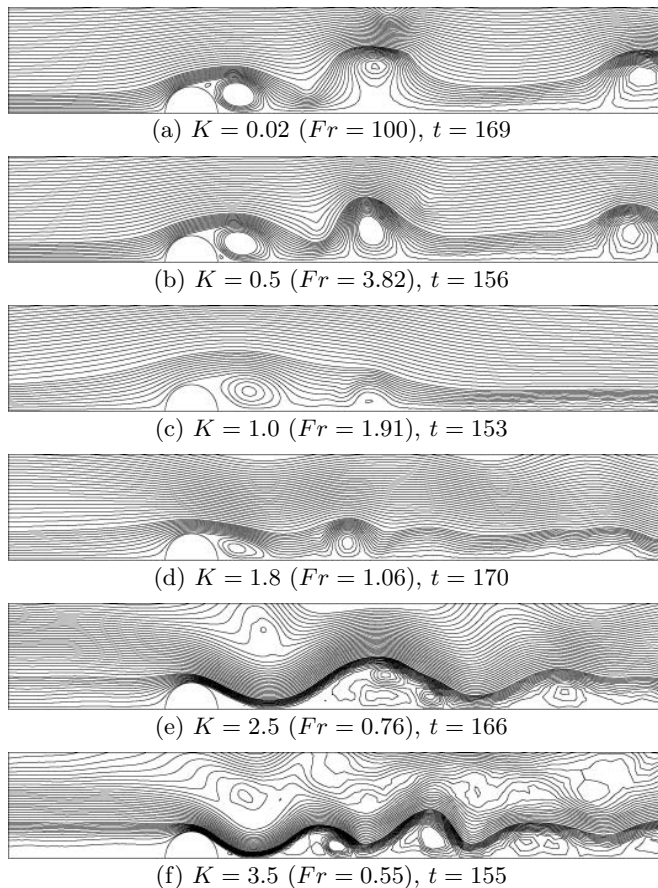


図-3 各成層度における半円柱周辺の流線図

(2) 解析結果及び考察

■ 流線図の比較

図-3に、各成層度における流線図を示す（なお、図は渦の再付着距離が最も短いものを示している）。図-3から分かるように、半円柱周辺は非定常性が強く、 K が大きくなるにつれて、半円柱下流における渦の放出が押さえつけられていることが確認できる。また(f)の場合は他の成層度と異なり、半円柱の上流側表面付近に、重力波やブロッキング現象の影響と見られる現象が発生していることが分かる。

更に、本解析結果の妥当性を調べるために、各計算条件において、無次元時刻 $121 \leq t \leq 200$ 内で渦の再付着距離の平均値を測定した。それらを大屋らの実験・解析結果³⁾と比較した。成層度と渦の再付着距離の関係を図-4に示す。本報告で得られた解析結果のうち、成層度が比較的高い(c)～(f)に関しては実験結果と定性的に一致している。一方、(a),(b)については大きな誤差が生じていることが分かる。

■ 解析領域と反射波との関係

強安定成層流れでは流出付近での渦は押さえつけられる一方、半円柱から発生した重力波が流入境界で反射し、流れ場を不安定にする。その反射波が流れ場にどの程度の乱れをもたらすのかを、(i) 図-1の解析領域、(ii) 図-1の解析領域において半円柱上流部の x 方向長さを $80h$ から $20h$ に縮めた領域、の2ケースで解析することにより調べた。 $t = 300$ での流線図を図-5に示す。(ii)の方が、流入境界

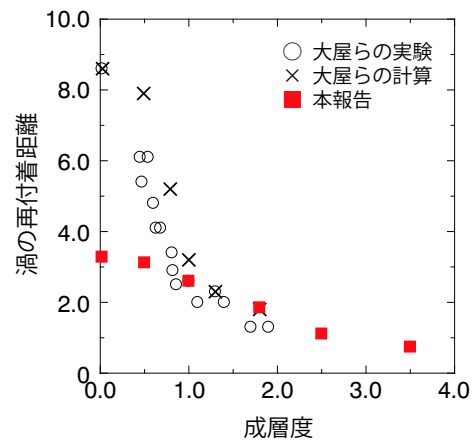


図-4 成層度と渦の再付着距離の関係

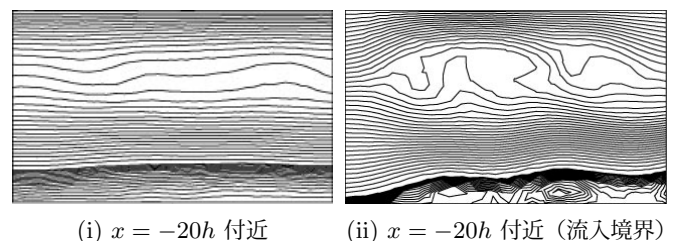


図-5 $K = 3.5$ ($Fr = 0.55$), $t = 300$ における流線図

付近における乱れが大きい。その一方で、(i)は多少の乱れが生じているものの、(ii)に比べると安定した流れとなっている。これより、流入部の解析領域を十分広く取ること、反射波による流れ場の不安定性を抑えられることが分かる。

4. おわりに

本報告では、地形風において密度成層の度合いが流れ場に及ぼす影響を2次元半円柱周り流れ解析により考察した。その結果、以下の結論を得た。

- 成層度による流れ場の変化を定性的に捉えることができた。しかし渦の再付着距離については、低成層度で大きな誤差が発生した。この点については、半円柱付近の要素分割の不規則性とも考えられる。
- 強安定成層流れ解析においては、上流の領域を十分に取ることで、反射波の影響を弱めることができる。今後の課題は、要素形状及び解析領域の大きさ、境界条件⁴⁾等が解析結果に及ぼす影響を定量的に考察することである。

参考文献

- 1) 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻：地球環境を学ぶための流体力学，成山堂書店，pp.195-223，2001.
- 2) T.E.Tezduyar et al.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 3) 大屋祐二，小園茂平，松尾浩一郎，前田明記，杉谷賢一郎：地面上の2次元物体を超える安定成層流の風洞実験と数値解析，九州大学応用力学研究所所報，第74号，pp.189-200，1992.
- 4) 清水隆博，樫山和男：安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析，第29回関東支部技術研究発表会講演概要集，pp.132-133，2002.