

安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風と降雨解析

中央大学 学生員 ○清水隆博
中央大学 正会員 榎山和男

1. はじめに

本論文は、地形風とそれに起因する降雨の解析を高精度にかつ安定に行うための安定化有限要素法を提案するものである。流れの基礎方程式としては、Boussinesq 近似を仮定した非圧縮 Navier-Stokes 方程式と連続方程式および密度方程式を用いる。離散化手法としては SUPG/PSPG 法¹⁾に基づく安定化有限要素法を用いる。一方、降雨の物理モデルとしては、暖かい雨のモデルである Kessler モデル²⁾を用いる。このモデルの基礎方程式は、雲水量と雨水量の保存式で表され、その離散化手法としては、SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いる。本手法を 2 次元半円柱及び 3 次元実地形を超える安定成層流解析に適用し、本手法の精度及び有効性について検討する。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と離散化

非圧縮性粘性流れを考え、密度は鉛直方向に一定な勾配 ($d\rho/dz = \rho_z$) の基本場 $\rho_B(z)$ をもち、Boussinesq 近似を仮定する。そのときの、運動方程式、連続式、密度方程式はそれぞれ式 (1) ~ (3) で表される。

運動方程式；

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \sigma + \rho g \mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

密度方程式；

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\mathbf{u} \rho_z \mathbf{k} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ_0 は基本場の密度、 ρ は同じ高さ z における無限上流での基本場 $\rho_B(z)$ からの密度のずれ、 g は重力加速度、 $\mathbf{k}$ は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している。応力テンソル σ は、以下の式で表される。

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \quad (4)$$

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (5)$$

ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数を表している。

一方、降雨の基礎方程式には Kessler モデルを用いる。雲水方程式；

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + AC + CC - EP - CV = 0 \quad (6)$$

雨水方程式；

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{u} + W\mathbf{k}) \cdot \nabla r - AC - CC + EP = 0 \quad (7)$$

ここに、 c, r は雲水量、雨水量、 W は降雨粒子の降下速度 (式 (8)) を表している。また、 AC, CC, EP, CV はそれぞれ

雲水の雨水への転換、雨水による雲水の捕捉、雨水の蒸発、凝結による変換量を表し、式 (9) ~ (12) によって表される。これらは 1 ステップ前の値を代入することにより既知量として扱う。

$$W = -38.3N_0^{-1/8} \cdot r^{1/8} \exp(k_0 z/2) \quad (8)$$

$$AC = k_1(c - \alpha) \quad (9)$$

$$CC = k_2 \cdot EN_0^{1/8} \cdot cr^{7/8} \exp(k_0 z/2) \quad (10)$$

$$EP = k_3 N_0^{7/20} \cdot cr^{13/20} \quad (11)$$

$$CV = \mathbf{u} \mathbf{k} (A + Bz) \quad (12)$$

ここに、 N_0 はマーシャル・パルマー分布の係数 ($10^7 m^{-4}$)、 k_0 は空気の気温低減率 ($10^{-4} m^{-1}$)、 $k_1 \sim k_3$ は定数 ($k_1 = 10^{-3}$, $k_2 = 6.94 \times 10^{-4}$, $k_3 = 1.93 \times 10^{-6}$)、 α は転換の臨界値 ($0.5 gm^{-3}$)、 E は捕捉率 (1.0)、 z は高さ (m)、 A, B は定数 ($A = 3 \times 10^{-3} gm^{-4}$, $B = -3 \times 10^{-7} gm^{-5}$) をそれぞれ表している。

また、地表降雨強度 $R[mm/hour]$ は、雨水量から次のように与えられる。

$$R = 138N_0^{-1/8} \cdot r^{9/8} \quad (13)$$

境界条件としては、以下に示す Dirichlet 型、Neumann 型境界条件が与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (14)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (15)$$

ただし、降雨解析においては Dirichlet 型境界条件のみが課せられる。

(2) 安定化有限要素方程式

基礎方程式系に対して、SUPG / PSPG 法¹⁾に基づく安定化有限要素法を適用し、2 次元問題では線形三角形要素、3 次元問題では線形四面体要素を用いて補間を行うと次の有限要素方程式を得る。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\delta(\mathbf{u})) \mathbf{u} - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_\delta) \frac{1}{\rho_0} p + \nu \mathbf{S} \mathbf{u} + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{k} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_\epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{C}_\epsilon \frac{1}{\rho_0} p + \mathbf{M}_\epsilon \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{k} = 0 \quad (17)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\delta(\mathbf{u})) \rho + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \mathbf{u} \rho_z \mathbf{k} = 0 \quad (18)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\delta(\mathbf{u})) c + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) f_c = 0 \quad (19)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}, W) + \mathbf{K}_\delta(\mathbf{u}, W)) r + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) f_r = 0 \quad (20)$$

ここに、 M, K, C, S は、係数行列であり、添字 δ, ε は、それぞれSUPG項、PSPG項に起因するものを表わす。また、式(19),(20)における f_c, f_r はそれぞれ雲水方程式、雨水方程式における雲物理の変換量(AC, CC, EP, CV)をまとめたものである。

時間方向の離散化において、時間微分($\partial u / \partial t$)は以下のように差分近似する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (21)$$

ここに、 Δt は微小時間増分量であり、この時間の離散化において流速 u と圧力 p は以下のように与えられる。

$$u \div \theta u_{n+1} + (1 - \theta) u_n \quad (22)$$

$$p = p_{n+1} \quad (23)$$

θ は時間微分の精度と安定性をコントロールするパラメータであり、本研究では2次精度である $\theta = 0.5$ のCrank-Nicolson法を用いている。なお、連続式は陰的に扱っている。また、密度、雲水量、雨水量についても、式(21),(22)と同様に離散化している。

(3) 非線形方程式の解法

非線形方程式系(16),(17)を解くために、本研究では非線形方程式系に対してNewton-Raphson法を用い線形化している。

非線形方程式系(16),(17)は、次式のような連立方程式で表すことができる。

$$R(d_{n+1}) = 0 \quad (24)$$

ここで、 d_{n+1} は $n+1$ 時刻の未知量である。式(24)に対してNewton-Raphson法を適用すると、次式のような線形方程式が得られる。

$$\frac{\partial R(d_{n+1}^k)}{\partial d} (\Delta d_{n+1}^k) = -R(d_{n+1}^k) \quad (25)$$

ここで、 k はNewton-Raphson法の繰り返し回数を表し、 Δd_{n+1}^k は d_{n+1}^k に対する増分を表す。

3. 数値解析例

(1) 地形性降雨解析

地形性降雨解析問題への本手法の有効性を検討するため、2次元半円柱問題を例に流れ解析及び降雨解析を行った。

解析領域、境界条件はFig.1のように設定した。解析に用いた有限要素分割の節点数は10,360、要素数は20,044(最小分割幅24.14m)である。流入流速として $u^* = 2z^{0.25} \text{m/sec}$ を与えた。降雨解析の境界条件として、上層、流入側からの降水粒子の供給はなく($r=0$)、流入側からは常に一定の飽和水蒸気が供給される($c=0$)とする。なお、微小時間増分量、成層度はそれぞれ $\Delta t=0.5 \text{sec}$ 、 $K=0.02$ とした。

Fig.2,3,4に風が吹きはじめてから1時間後における流れ線図と雲水量、雨水量の分布図を示す。Fig.2より、安定した流れ場の解析結果を得ることができていることが分かる。また、Fig.3,4より、円柱上空の上昇流により雲が発生し移流していく様子が分かる。雨水量についても雲水量の変化に対応したものになっている。

また、Fig.5にFig.1中のA,B点での地表降雨強度の時刻歴を示した。円柱上空の上昇流の影響と円柱後方の渦

の影響がA点、B点の地表降雨強度に現れていることが分かる。

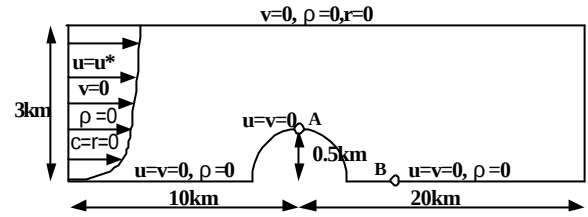


Fig.1 Numerical example

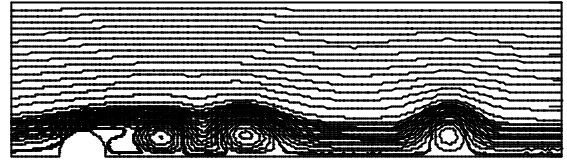


Fig.2 Computed stream line(time=1hour)

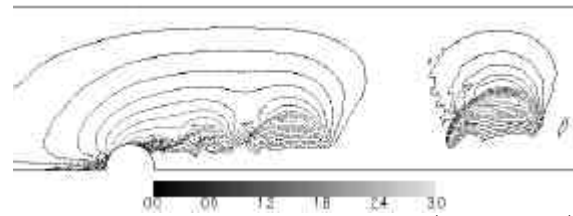


Fig.3 Computed cloud water content(time=1hour)

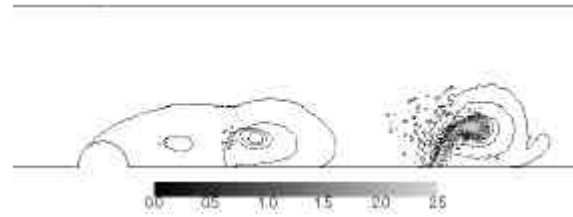


Fig.4 Computed rain water content(time=1hour)

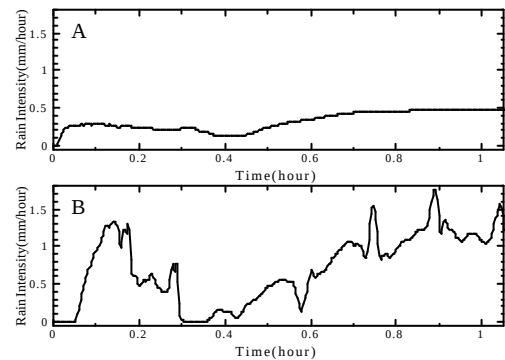


Fig.5 Rainfall intensity

4. 結論

本論文により安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風と降雨解析手法を提案した。数値解析により、本手法は安定で定性的に妥当な解を与えることを示した。降雨解析の有効性の検討が今後の課題である。

参考文献

- 1) T. Tezduyar, 'Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations', Advances in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1991.
- 2) Kessler, E., 'Models of microphysical parameters and processes', Meteorological Monographs, Vol.10, pp.26-31, 1969.
- 3) 大屋裕二, 小園茂平, 松尾浩一郎, 前田明記, 杉谷賢一郎, '地面上の2次元物体を超える安定成層流の風洞実験と数値解析', 九州大学応用力学研究所所報第74号, pp.189-200, 1992.