

# 滑車を有するケーブル要素の精度と効率化

長岡技術科学大学 学生会員 折戸邦明  
 長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治  
 長岡技術科学大学 正会員 長井正嗣

## 1. まえがき

著者らの研究により、ケーブル要素の汎関数を修正して、少ない自由度で解析可能な要素端部に滑車を有するケーブル要素が開発されている。しかし、特定の状況において計算が不安定になることがある。また、ケーブル要素の剛性方程式を求める式の被積分関数には、軸力の逆数が含まれ、これがゼロの場合や非常に小さい場合には、被積分関数の値が大きく変わるため、正確な積分を求めるために多くの積分次数や積分区間を要する。そこで、そのような数値積分を効率的に行う方法を考案し、数値計算により精度と収束性について検討する。

## 2. ケーブル要素

いま、ケーブルに沿った単位長さ当たり  $q$  の分布荷重と集中荷重  $Q$  が作用して平衡状態にあるものとする。このときのケーブルに生じている軸力を  $N$  とする。この状態のケーブルにさらに分布荷重  $\Delta q$  と集中荷重  $\Delta Q$  が作用したときの平衡状態を考える。このときのケーブル要素の平衡状態は、次の汎関数の停留条件として得られる<sup>1)</sup>。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} dx + \left[ \{(N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q)\}^T \Delta u \right]_0^l \quad (1)$$

ここで、 $(N + \Delta N)$  は軸力ベクトルであり、ケーブル要素内の平衡方程式  $(N + \Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q)$  を満足した次式を用いる。

$$(N + \Delta N) = (c + \Delta c) - \int_0^x (q + \Delta q) dx \quad (2)$$

また、増分前後のケーブルの単位接線ベクトルをそれぞれ  $e, e^*$  とする。

## 3. 数値積分

本研究のケーブル要素の剛性方程式の被積分関数には、軸力  $N$  や  $N + \Delta N$  の逆数が含まれている。図1には代表的なケーブル部材の自重による軸力とその

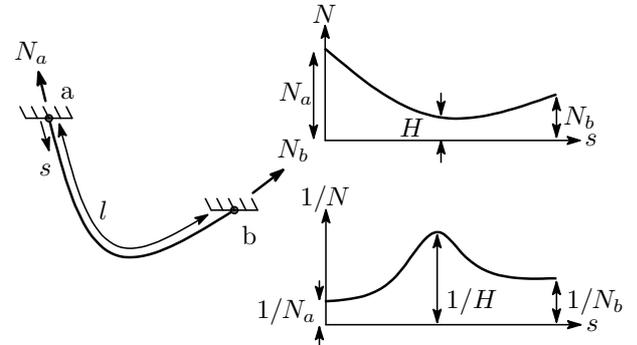


図-1 自重作用下でのケーブルの軸力とその逆数

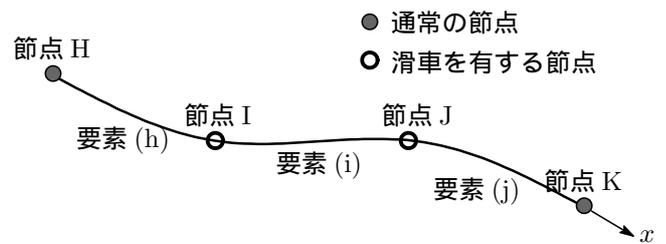


図-2 滑車を有するケーブル

逆数を示している。両支点間の距離に比べてケーブル長が長い場合には、ケーブル途中での軸力が小さくなり、その逆数の値は、非常に大きな値になる。したがって、数値積分を正確に行うために積分方法に工夫を要する。

このような被積分関数の値が大きく変動する積分方法には、種々の方法が考案されているが、ここでは、比較的簡単な方法として、軸力の逆数が最大になる点と、変曲点を積分区間の区切りとし、それぞれの積分区間内を通常の数値積分法により求める。

軸力の逆数が極値となる位置と変曲点の位置は以下の条件を満足した点である。

- $q^T e = 0$  となる位置で、軸力の逆数は最大となる。
- 軸力の逆数の変曲点は、 $q^T e = \pm q/\sqrt{3}$  となる位置にある (等分布荷重の場合)。

なお、 $q$  は分布荷重の大きさであり、 $q = \sqrt{(q^T q)}$  である。

**Key Words:** cable structures, pulley, finite element method

〒940-2188 新潟県長岡市富岡町 1603-1 TEL 0258-46-6000 FAX 0258-47-9600

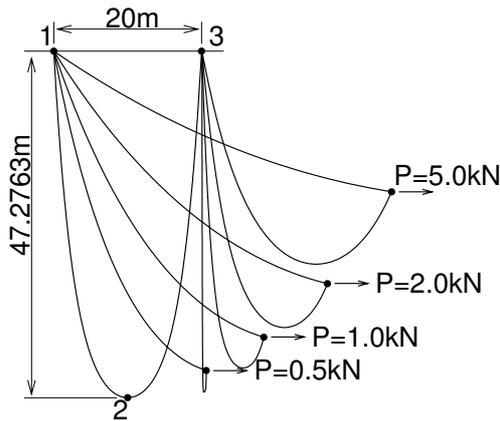


図-3 大きくたわんだケーブル

#### 4. 滑車を有するケーブル要素

図-2のように、ケーブル(h), (i), (j)が節点I, Jに取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を  $\Pi_C^{(h)}$ ,  $\Pi_C^{(i)}$ ,  $\Pi_C^{(j)}$  とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta\tilde{u}_I \{ (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \} \\ & + \Delta\tilde{u}_J \{ (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\Delta\tilde{u}_I$ ,  $\Delta\tilde{u}_J$  は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点IとJのケーブルの滑り変位を表している。この変位は、ケーブルに沿ったx軸方向の変位を正としている。また、式中の  $(N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$  は、要素(h)の節点Iでの軸力を表している。

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta\tilde{u}(N + \Delta N)]_0^l \quad (4)$$

#### 5. 数値計算例

##### (1) 大きくたわんだケーブル

非常にたわんだ状態のケーブルの計算例を図-3に示す。ここでは、伸び剛性  $EA = 150\text{MN}$ 、分布荷重  $q = 50\text{N/m}$ 、ケーブルの無応力長が  $l = 100\text{m}$  の場合に

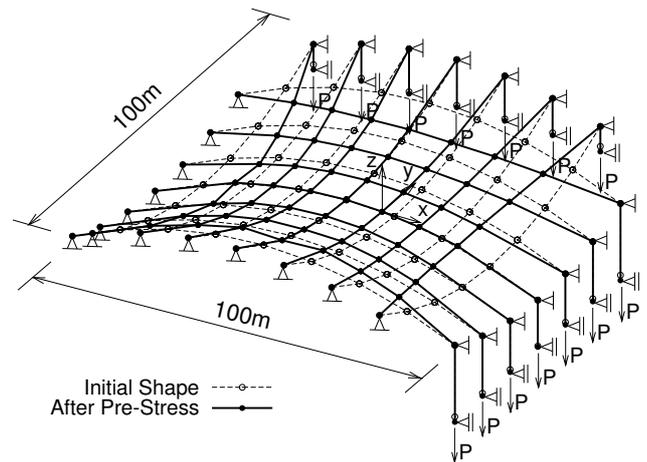


図-4 ケーブルネットの変形

ついて、2要素でモデル化を行い、分布荷重が作用した状態での形状を計算し、この状態のケーブルの最下点に、さらに水平荷重  $P$  を、 $0.5\text{kN}$ ,  $1.0\text{kN}$ ,  $2.0\text{kN}$ ,  $5.0\text{kN}$  と順次載荷したときのケーブルの変形状態を解析した結果を示している。台形則のような低次の数値積分法を用いた場合、この計算例では200区間に分割して積分すると収束した。ここで、提案する積分方法による方法では、個々の積分区間内を6点のガウス積分により数値積分を行うと、解が得られた。なお、積分区間内は、節点1-2のケーブルが1区間、節点2-3のケーブルが4区間になっている。

##### (2) ケーブルネット

図-4のような14本のケーブルからなるケーブルネットの解析を行う。各ケーブルの両端は通常の節点であり、これ以外の内部の節点は、全て滑車を有する節点である。また、各ケーブルの交差している節点では、滑車内をケーブルが滑る状態となっている。ケーブルのローラー支持点に鉛直荷重  $P = 5\text{kN}$  を作用させると、14本全てのケーブルの軸力は  $5\text{kN}$  になる。このときのケーブルの状態を図-4に太線で示している。なお、ケーブルのヤング係数  $E = 140\text{GPa}$ 、断面積  $A = 95.5\text{mm}^2$  である。

#### 6. あとがき

数値積分を効率的に行う積分方法を考案し、数値計算により精度と収束性について検討した。

##### 参考文献

- 1) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.