

洪水氾濫解析のための安定化陽的有限要素法

中央大学 学生員 ○ 菊池 勇
中央大学大学院 学生員 田中 聖三
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

洪水氾濫シミュレーションを高精度かつ高速に行う手法を構築することは、防災対策等において重要なことである。これまで著者らは、洪水氾濫解析のための手法として、固定メッシュを用いた Euler 的手法に基づく陰的な有限要素法¹⁾を提案してきた。この方法は高精度であるが数値的安定性に問題があった。

そこで本研究では、洪水氾濫解析を高精度にかつ安定に解析可能となる陽的な安定化有限要素法を提案するものである。本手法の有効性の検討をするために解析例として段波問題と矩形造波水槽内の水際線の移動問題を取り上げ、実験値及び既往の手法による結果との比較を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と有限要素法

洪水氾濫解析の基礎方程式は以下の浅水長波方程式で与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(h + \zeta) u_i] = 0 \quad (2)$$

u_i は断面平均流速, h は水深, ζ は水位変動量, g は重力加速度である。基礎方程式の空間方向の離散化に対しては, SUPG(Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) 法に基づく有限要素法を適用すると, 次の有限要素方程式が導かれる。

$$(M + M_\tau) \frac{du_i}{dt} + (K + K_\tau) u_j + (H + H_\tau) \zeta + T u_i = 0 \quad (3)$$

$$(M + M_\tau) \frac{d\zeta}{dt} + (B + B_\tau) u_i + T \zeta = 0 \quad (4)$$

ここで, M, K, H, B, T は係数行列であり, 添え字 τ が付いているものは, SUPG 項に起因する行列であり, T が衝撃捕捉項に起因する行列となっている。SUPG 法と衝撃捕捉項の安定化パラメータ τ , 以下のように定義した。

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \|u_i\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-1} \quad (5)$$

$$\delta = \frac{h_e}{2} \|u_i\| \quad (6)$$

ただし, M_τ は連立 1 次方程式の解法に陽解法であるマルチパス法を用いるため考慮しないものとする。時間の離散化には前進差分を用いた。

(2) 移動境界手法

移動境界手法として本手法では, 複雑地形に対する適用性の面で優れた固定メッシュを用いる Euler 的手法を採用した。Euler 的手法とは, 対象領域をあらかじめ要素分割しておき, 各時間ステップにおいて各要素が陸域か水域か判定することにより水際線を表現する方法である。アルゴリズムの詳細は参考文献¹⁾を参照されたい。

3. 数値解析例

(1) 段波問題

本手法の有効性を検討するために, 段波問題を取り上げ, 計算精度, 計算コストの点で既往の手法による結果との比較を行った。既往の手法としては, 陽解法としてセレクトィブランピング法を用いた二段階陽解法を, 陰解法として SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁾を用いた。図 - 1 に段波問題の初期水位の状態を示す。有限要素分割は x 軸方向に 50 分割, y 軸 (奥行) 方向に 2 分割し, 境界条件として, 壁面において slip 条件を与えた。なお, 計算条件として, 微小時間増分量 Δt は 0.001(s), 二段階陽解法におけるランピングパラメータ e は 0.8, 本手法であるマルチパス法の反復回数は 3 回とした。

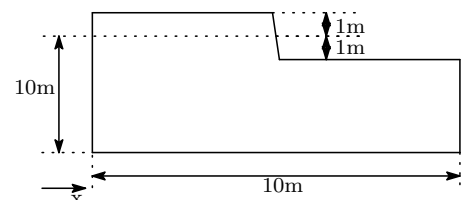


図 - 1 段波の初期図

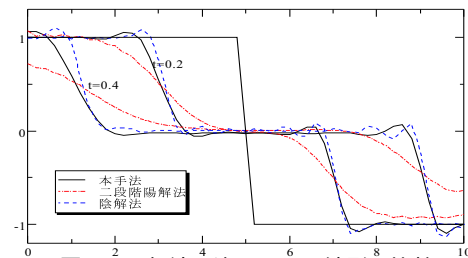


図 - 2 解法の違いによる波形の比較

表 - 1 計算容量と計算時間の比較

	二段階陽解法	マルチパス法	陰解法
計算容量 (kB)	460	404	686
計算時間 (s)	2.35	1.30	3.40

図 - 2 は, 各種解法による波形の計算結果である。図より, 本手法は, 二段階陽解法に比べ減衰も少なく, かつ陰解法で見られる数値的不安定性による振動が少ないことがわかる。また, 表 - 1 に示す計算容量と計算時間

KeyWords: 浅水長波方程式, 安定化陽的有限要素法, 移動境界, Euler 的手法

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1803

の比較からも本手法の有効性がわかる．なお，計算には IBMRS/6000SP を用いた．

(2) 矩形造波水槽内の水際線の移動問題

本手法の移動境界問題への有効性を検討するために，図 - 3 に示す矩形造波水槽内の水際線の移動問題を取り上げる．この図における境界 A-B に入射条件として次式を与える．

$$\zeta = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right), u = \zeta \sqrt{\frac{g}{h + \zeta}} \quad (7)$$

ここで，A は振幅，T は周期である．また，側面では slip 境界条件を与える．図 - 4 に矩形造波水槽の有限要素分割図を示す．なお，斜面部の最小分割幅は 10cm とし，陸域と水域の判定に用いる微小量 ε^1 は 1mm とした．

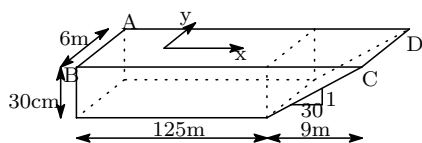


図 - 3 矩形造波水槽

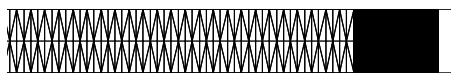


図 - 4 有限要素分割図

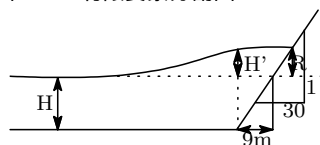


図 - 5 遡上高さ R，勾配変化点の水位 H'

解析結果の妥当性の検討を行うため，図 - 5 に示す遡上高さ R，勾配変化点での水位 H' において実験値との比較を行った．比較対象とする実験では，水深，周期，振幅がそれぞれ異なる 50 ケースが行われているが，本研究ではその中の 10 ケースを用い比較を行った．実験値の詳細は，参考文献²⁾を参照されたい．なお，微小時間増分量 Δt は 0.001(s)，マルチパス法の反復回数を 7 回とした．表 - 2 は，R，H' の解析結果と実験値との比較である．図より，ケース 1，2 のように周期が長くかつ振幅の小さいものは実験値によい一致を示し，逆に周期が短いものや振幅の大きいものは実験値に比べ大きな値となっている．これは，基礎方程式に浅水長波方程式を用いていることと，入射条件として長波の進行波の条件を仮定しているため，岸からの反射波が入射波に干渉しているためである．この反射波の処理については今後の課題である．

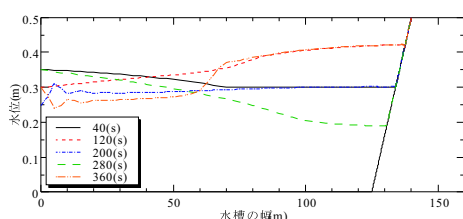


図 - 6 case1 における水面形の様子

表 - 2 実験値との比較

case	周期 T(s)	振幅 A(cm)	実験値 R(cm)	計算値 R(cm)	実験値 H'(cm)	計算値 H'(cm)
1	240	6.0	13.9	12.0	13.0	12.0
2	320	5.3	11.6	10.0	12.7	10.8
3	80	7.5	20.0	22.3	10.0	12.6
4	120	10.3	26.0	31.0	16.3	20.1
5	150	10.0	20.1	30.3	15.9	20.6
6	140	9.0	21.1	27.3	15.0	18.5
7	150	8.7	18.7	26.0	16.5	18.4
8	160	9.0	24.0	26.3	17.5	19.2
9	120	6.7	15.0	20.7	11.0	14.1
10	150	7.0	16.4	19.7	11.6	15.1

次に，有限要素分割幅が解析結果へ及ぼす影響について検討を行った．有限要素分割には，斜面部の分割幅がそれぞれ 50cm，10cm，2cm のものを用いて比較を行った．計算条件としては，ケース 1 を用いて比較を行った．なお， Δt は 0.001(s)，マルチパス法の反復回数を 7 回とした．表 - 3 に分割幅を変化させた場合の遡上高さ R，勾配変化点での水位 H' の値を示す．これらの結果より，斜面部の分割幅が大きい場合，実験値と大きく異なることが分かる．このことから，水際線の近傍の有限要素メッシュには水際線の移動を十分に表現可能な分割幅を用いる必要がある．

表 - 3 分割幅による比較

分割幅 (cm)	総節点数	総要素数	R(cm)	H'(cm)
50	333	440	28.3	11.8
10	1053	1400	12.0	12.0
2	3855	5136	12.0	12.1
実験値				
			13.9	13.0

4. おわりに

本報告では，段波問題と矩形造波水槽内の水際線の移動問題を取り上げ，本手法の有効性の検討を行い以下の結論を得た．

- 段波解析において，本手法の有効性を計算精度，計算コストの面で示すことができた．
- 水際線の移動問題において，本手法は実験値とのよい一致を示したが，短周期の入射波の場合には差異が見られた．
- 移動境界手法として Euler 的手法を用いた場合，水際線近傍の有限要素分割幅が結果に及ぼす影響が大きく，水際線の移動を十分に表現可能な有限要素メッシュを用いる必要がある．

今後の課題として，より高精度な解析を行うために，反射波の処理に対する検討やより実現象に近い問題に適用し，本手法の有効性を検討する予定である．

参考文献

- 1) 高砂篤史，桜庭雅明，櫻山和男：洪水氾濫解析のための安定化有限要素法：第 28 回関東支部技術研究発表会講演概要集：pp124-125，2001
- 2) Noboru Shuto：Run-up of long wave on a sloping beach：Coastal Engineering in Japan：Vol.10，pp 23-38，1967
- 3) 松本純一，梅津剛，川原睦人：陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析：応用力学論文集：Vol.1，pp263-272，1998