ALE 法を用いた自由表面流れ解析における 自由表面上の境界条件の検討

中央大学　学生員　○ 藤井　数直
中央大学大学院　学生員　田中　聖三
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

河川や海岸などの移動境界問題を解析する場合，時々刻々と変化する自由表面形状を表現しなくてはならない．この自由表面流れを高精度に解析する方法として ALE 法[1] がある．ALE 法は自由表面形状を直接的に表現した上で解析領域を更新する移動メッシュを用いて解析を行う手法であり，固定メッシュを用いるオイラー的手法に比べて少ないメッシュ分割で高精度な結果を与えることが知られている．ただしこの方法は，自由表面上の運動学的条件の取り扱い方により解の精度と安定性に影響を与えることになる．

本報告では，この自由表面上の運動学的条件の取り扱いに方法として２種類の方法を用い，解析精度と安定性について比較検討を行った．支配方程式の離散化手法としては，SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法[2] を適用し，数値解析例として２次元矩形貯槽内スロッシング解析を行った．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

ALE 表記された Navier-Stokes の運動方程式と連続式は以下のようになる．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-f_i\right)-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{2}$$

ここで，ρ，u，$\bar{u}$，f はそれぞれ密度，流速，相対速度，物体力である．また，σ_{ij} は以下で表される応力テンソルである．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

ここで，μ，p はそれぞれ粘性係数，圧力である．そして上式に対して，SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると，以下の有限要素方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_\delta)\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{K}\left(\overline{u}_j^n\right)+\boldsymbol{K}_\delta\left(\overline{u}_j^n\right)\right)u_i^{n+1}\right.\\
&\qquad\left.+\boldsymbol{S}u_j^{n+1}\right\}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_\delta)\frac{1}{\rho}p^{n+1}=b_i^n,\\
&\boldsymbol{C}^T u_i^{n+1}+\boldsymbol{M}_\varepsilon\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\left(u_j^n\right)u_i^{n+1}+\boldsymbol{C}_\varepsilon\frac{1}{\rho}p^{n+1}=d_i^n,
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，b_i^n，d_i^n は，それぞれ運動方程式，連続式の既知項をまとめたものであり，添え字の δ，ϵ はそれぞれ SUPG 項，PSPG 項に起因するものを表す．時間方向の離散化には陰的な Crank-Nicolson 法を用い，式 (1)，(2) の連立方程式の解法として Element-by-Element GMRES 法を用いる．

(2) 解析領域の更新

ALE 法に基づく自由表面流れ解析では，時刻ステップ毎に移動する自由表面の動きに合わせて解析メッシュを更新する必要がある．この場合，自由表面上の節点変位量を境界条件として，領域内の全節点での変位量を Laplace 方程式を用いて求解し，解析メッシュを更新する．なお，Laplace 方程式の解法としては Element-By-Element SCG 法を用いる．

3. 自由表面上での運動学的条件

自由表面上では，相対速度 $\bar{u}$ は必要条件として以下の運動学的条件を満たさなければならない．

$$\bar{u}_i\boldsymbol{n}_i=0, \tag{5}$$

$\boldsymbol{n}_i$ は外向き法線ベクトルである．運動学的条件の評価方法としては水位 h に関して以下の２種類の方法が考えられる．

(1) 方法１

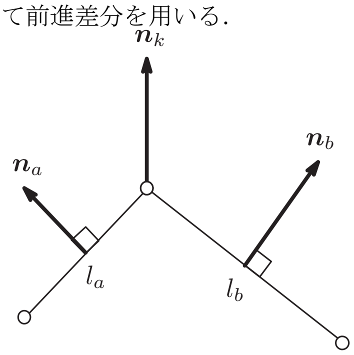
式 (5) の運動学的条件を水位 h に関してまとめると２次元の場合以下のように表すことができる．

$$\frac{\partial h}{\partial t}=u_2+\overline{u}_1\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2}=0, \tag{6}$$

ここで，外向き単位法線ベクトルの評価方法としては，図－1 に示すような隣接する自由表面要素の外向き法線ベクトルの加重平均を用いる[1]．

$$\boldsymbol{n}_k=\frac{\boldsymbol{n}_a l_a+\boldsymbol{n}_b l_b}{l_a+l_b}\Big/\left\|\frac{\boldsymbol{n}_a l_a+\boldsymbol{n}_b l_b}{l_a+l_b}\right\|, \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{n}_a,\boldsymbol{n}_b$ は外向き単位法線ベクトルであり，l_a，l_b は線要素の長さである．式 (4) の求解方法としては，時間微分の評価として前進差分を用いる．



図－１　表面節点における法線の評価

(2) 方法２

式 (5) の運動学的条件は，以下の水位 h に関する移流型の方程式で表すことができる．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\overline{u}_1\frac{\partial h}{\partial x}-u_2=0, \tag{8}$$

KeyWords：　自由表面流れ解析，境界条件，安定化有限要素法，ALE 法

連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL 03-3817-1815　FAX 03-3817-1803

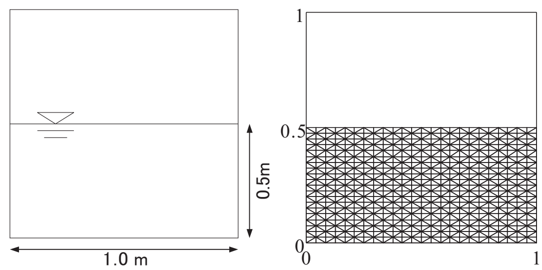
この移流型の方程式を，SUPG 法による安定化有限要素法により離散化し，Element-By-Element Bi-CGSTAB 法を用いて解くことにより，自由表面位置を求解する．

上記の方法 1 または方法 2 により求められた水位 h の各時間における増分量は前節で述べた Laplace 方程式の自由表面上での境界値となる．

4. 数値解析例

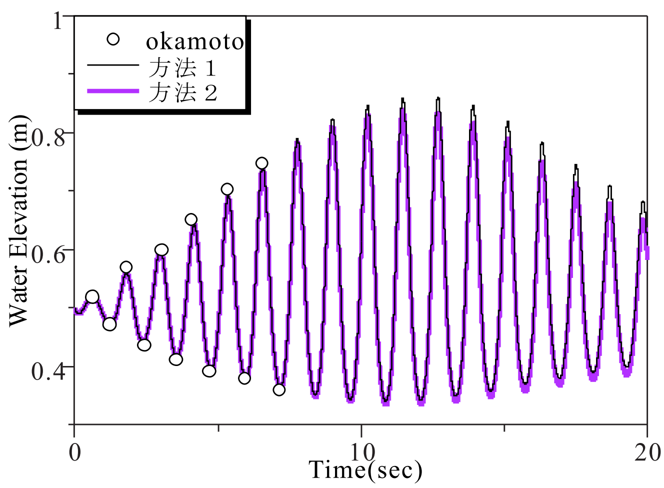
(1) 矩形貯槽内スロッシング解析

自由表面上での運動学的条件の評価法が解に及ぼす影響を検討するため，2 次元矩形貯層内スロッシング解析[3] を行う．図－2 に示す矩形貯層を，静止状態から正弦波により水平加振するものとした．また，振幅 A は $9.3 \times 10^{-3}m$，周期 T は $1.183sec$，微小時間増分量 Δt は $1.0 \times 10^{-3}sec$，分割数は 24×20 とした．境界条件としては，壁面で Slip 条件を与えた．

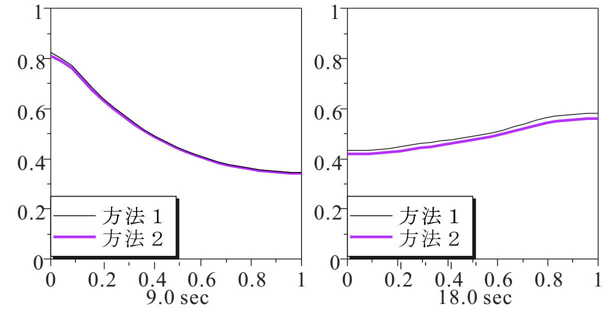


図－2　解析モデル及び有限要素分割図

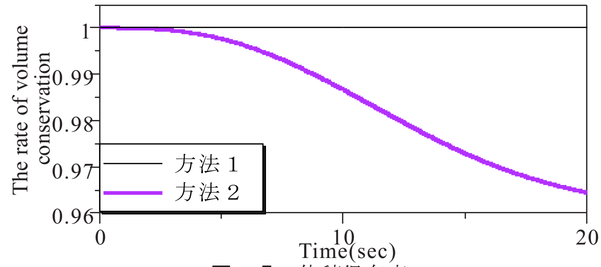
解析結果として，図－3 に方法 1 と方法 2 を用いた場合の左壁での水位の時刻歴を示す．これにより両手法とも実験値に対してほぼよい一致を示していが，時間の経過とともに方法 2 では，方法 1 に比べて解が減衰している．また，図－4 及び図－5 に示すように，方法 2 では体積が減少していることがわかる．これは移流方程式の時間と空間の離散化により生じる物である．運動学的条件の計算部分のみで計算時間の比較を行ったところ，方法 1 では $0.289sec$，方法 2 では $3.009sec$ となり方法 1 に比べ方法 2 では連立方程式を解くために計算時間をより多く必要としていることがわかる．



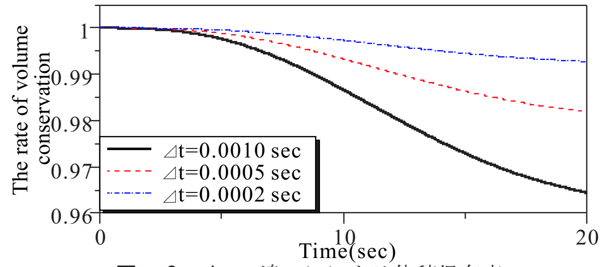
図－3　左壁の水位歴



図－4　水面形状



図－5　体積保存率



図－6　Δt の違いにによる体積保存率

方法 2 において体積の減少が見られたので，微小時間増分量 Δt を 0.0010，0.0005，0.0002(sec) と変化させて解析を行った結果を図－6 に示す．図より，Δt を微小にとることによって体積の減少率が小さくなることがわかる．

5. おわりに

本報告では，ALE 法の自由表面上の境界条件の取り扱い法について検討し，数値解析例として 2 次元矩形貯層内スロッシング解析を行うことで，その精度と安定性について調べた．その結果以下の結論を得た．

- 方法 1 は，体積率と計算結果（左壁の水位歴）の点から方法 2 より優れ，安定な解を与えることが示された．
- 方法 2 は，安定な解を与えるが，体積の減少と水位の減衰がみられ，微小時間増分量 Δt による影響を受けやすいことが確認できた．

今後の課題として，開境界問題で特に問題となる流出側境界の取り扱いについての検討が挙げられる．

参考文献

1) T.Nomura:ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,Vol.112,pp.292-308,1994

2) T.Tezduyar : Stabilizedfinite element formulations fo incompressible flow computaions,Advances in Applied Mechanics，28，pp1-441，1991

3) 岡本隆：任意ラグランジェ・オイラー有限要素法による大振幅スロッシング解析に関する研究，博士論文，1992 年