

VOF 法を用いた自由表面流れ解析における体積補正手法の構築

中央大学 学生員 ○ 弘崎 聡
日本工営株式会社 正会員 桜庭 雅明
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

自由表面を有する複雑な流れを把握することは工学上重要であり、数多くの数値解析手法がこれまで提案されている。その中で、最も代表的な手法として VOF (Volume of Fluid) 法¹⁾がある。VOF 法は自由表面形状を表すのに固定メッシュを用いて、流れ場の計算で求めた物理量 (速度、圧力) から体積占有率を表す界面関数 (VOF 関数) を移流させることにより、自由表面位置を決定させる手法である。この手法は砕波などを含む複雑な自由表面流れを解析することが可能であるが、液体の体積保存率が低いことが課題とされている。

そこで本研究は、従来の VOF 法に新しい体積補正手法を導入して、自由表面流れ解析を高精度に行う手法を構築した。なお、数値解析例として 2 次元矩形貯水槽内スロッシング解析を取り上げ、本手法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

(1) 流れ場の計算

非圧縮性粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes の運動方程式と連続式は以下ようになる。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - f_i \right) - \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここに、 u_i は流速成分、 ρ は密度、 f_i は物体力を表している。また、 σ_{ij} は応力テンソルであり、式 (3) のように表す。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

p は圧力、 μ は粘性係数を表す。基礎方程式 (1)、(2) に対して SUPG/PSPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin/Pressure Stabilizing Petrov Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法²⁾を適用し、P1/P1 (流速・圧力双 1 次) 要素を用いて空間方向の離散化を行った。また、時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用しており、連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を用いた。

(2) 自由表面位置の計算

自由表面位置を追跡する手法として、界面捕捉法の 1 つである VOF 法¹⁾を用いた。VOF 法は、自由表面位置を表現する VOF 関数 ϕ (液体であれば 1、気体であれば 0、自由表面上であれば 0.5) に関する移流方程式を解くことにより自由表面位置の履歴を追跡する手法である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

ここで、 u_i は流速成分である。なお、各節点における気体、液体の密度と粘性係数は計算された VOF 関数値を用いて、式 (5) のように決定できる。

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi), \quad \mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \quad (5)$$

ここで、 $\rho_l, \rho_g, \mu_l, \mu_g$ はそれぞれ液体、気体の密度および粘性係数である。また、式 (4) の解法には CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinate) 法³⁾を用いた。CIVA 法は移流方程式の厳密解が式 (6) となることから、面積座標を用いて、上流側の三角形要素内の VOF 関数を高次の補間を行うことにより解を求める手法である。面積座標 (L_1, L_2, L_3) を用いた場合における VOF 関数 ϕ は式 (7) のような 3 次関数で表すことができる。

$$\phi(x, y, t) = \phi(x - u\Delta t, y - v\Delta t, t - \Delta t) \quad (6)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{\substack{j,k=1 \\ (j \neq k)}}^3 \beta_{jk} (L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3) \quad (7)$$

ここで、 d は 1 次補間と 3 次補間の調節パラメータで、 $d = 0$ のとき 1 次、 $d = 1$ のとき 3 次補間となる。なお、 c は既往の研究³⁾で最適値として示された $1/2$ を用いた。係数 α, β は上流側の三角形要素での節点の VOF 関数 ϕ とその空間微係数を用いることにより決定され、以下ようになる。

$$\alpha_i = \phi_i, \quad \beta_{jk} = \phi_i - \phi_j + (x_j - x_i) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + (y_j - y_i) \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \quad (8)$$

(3) 体積補正手法

本手法は、従来の VOF 法で生じる液体・気体の体積変化を補正する方法を提案する。まず、自由表面近傍であることを判定する関数として式 (9) を用いて、解析領域内における自由表面近傍に重みを持つ値を式 (10) を用いて計算する。

$$D(\phi) = \frac{1}{2} [1 + \cos\{2\pi(\phi - 0.5)\}] \quad (9)$$

$$A(t) = \iiint D(\phi) dx dy dz \quad (10)$$

ここで、 $D(\phi)$ は自由表面位置では 1、自由表面から遠ざかるにつれて 0 に近づくような関数である。式 (10) で算出した $A(t)$ を用いて、各ステップの各節点ごとに補正する VOF 関数 ϕ_{err} は次式のように計算することができる。

$$\phi_{err} = \frac{V_{err}(t)}{A(t)} = \frac{(V(t) - V_{init})}{A(t)} \quad (11)$$

ここで、 V, V_{err} は各ステップにおける液体の体積および初期値と任意ステップにおける液体の体積の差であり、 V_{init}

KeyWords : VOF 法, 自由表面流れ解析, 体積補正手法, 安定化有限要素法, CIVA 法

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 FAX 03-3817-1803

は初期の液体の体積である．なお， ϕ_{err} はその値が負であれば液体の体積が減少，正であれば液体の体積が増加していることを表現している．この ϕ_{err} を用いて，式 (12) のようにオフセットすることにより体積補正を行う．

$$\phi(t) = \phi(t) - \phi_{err} \begin{cases} 0 < \phi < 0.5, & \phi_{err} > 0 \\ 0.5 < \phi < 1, & \phi_{err} < 0 \end{cases} \quad (12)$$

また，式 (12) を用いると VOF 関数 ϕ が 1 以上の値もしくは 0 以下の値になることがある．この場合，1 以上の値であれば 1 を，0 以下の値であれば 0 とすることにより，最終的に体積補正を行った VOF 関数を決定する．図-1 に 1 次元問題での本体積補正手法の概念図を示す．図より，本手法は VOF 関数が液体であれば 1，気体であれば 0 に近づける働きを有しているため，界面鋭化の効果を同時に発揮することができる方法であることがわかる．

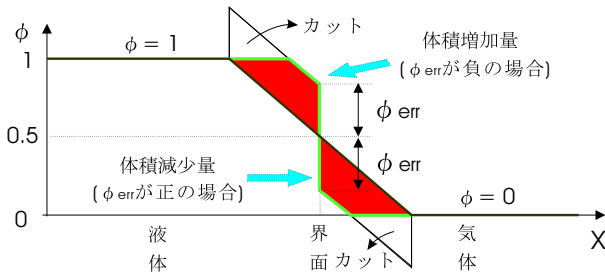


図-1 1次元問題での体積補正手法の概念図

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために，数値解析例として，図-2 に示すような 2 次元矩形貯水槽内スロッシング問題を取り上げた．なお，起振力として式 (13) で表わされる水平加速度を加えた．

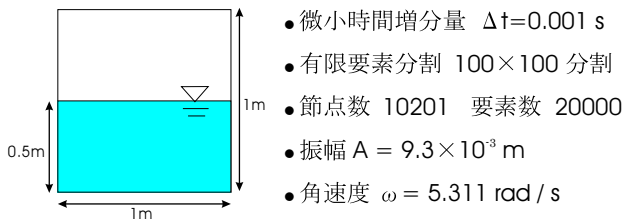


図-2 矩形スロッシング解析モデルと解析条件

$$f = A\omega^2 \sin \omega t \quad (13)$$

ここで，液体は水と仮定し， $\rho_l = 998.0 \text{ kg/m}^3$ ， $\mu_l = 1.01 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ，気体は空気と仮定し， $\rho_g = 1.205 \text{ kg/m}^3$ ， $\mu_g = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ を与えた．

図-3 に計算結果の時系列を示す．この結果より本手法による計算は安定に計算ができていることが確認される．また，左壁における時刻水位暦を図-4 に示す．なお，本手法の精度を検証するために，岡本による実験⁴⁾ および ALE 法⁵⁾ (節点数 525，要素数 960) と比較を行った．図より，体積補正を行った場合の結果は，体積補正を行わない場合に比較して，実験値，ALE 法と良い一致を示している．図-5 に本手法における液体の体積変化の時系列を示す．図より，本手法で提案した体積補正を導入した結果はほとんど体積が変化しないことがわかる．

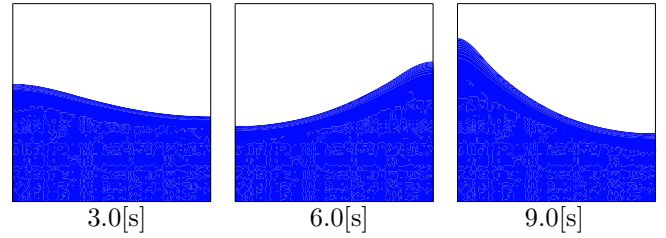


図-3 矩形貯水槽内スロッシング解析結果

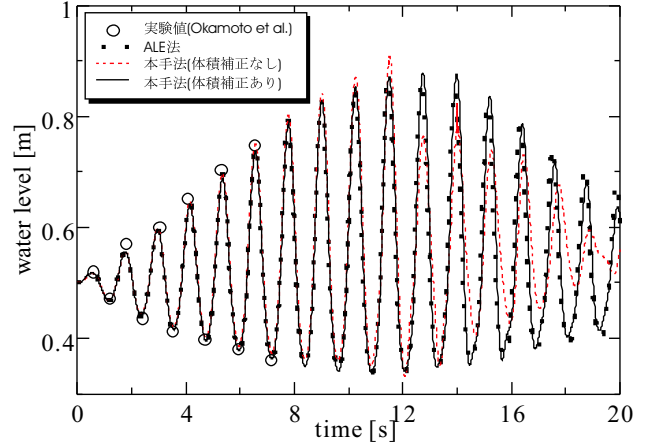


図-4 左壁における時刻水位暦

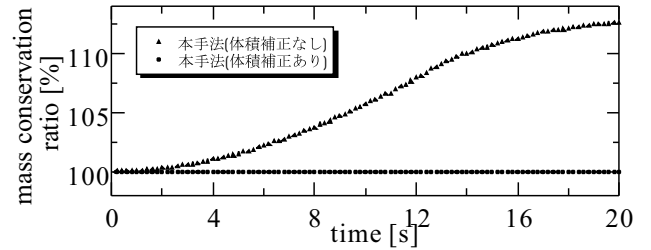


図-5 液体の体積増減率の時間推移

4. おわりに

本報告では，VOF 法を用いた自由表面流れ解析における体積補正手法の構築を行った．数値解析例として，2 次元矩形貯水槽内スロッシング解析を取り上げ本手法の有効性を検討し，以下の結論を得た．

- 本手法による解析結果は実験値および ALE 法の解析値とほぼ一致を示し，計算精度の観点で有効性が示された．
- 本手法による体積補正は体積保存性が高く，有効性が確認できた．

今後は 3 次元問題を行うことを予定している．

参考文献

- 1) C.W.Hirt and B.D.Nichols: Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, Journal of Computational Physics, Vol.39, pp.201-225, 1981
- 2) T.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advances in Applied Mechanics, Vol.28, pp.1-44, 1991
- 3) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発，日本機械学会論文集 (B 編), 64-620, 1998
- 4) 岡本隆: 任意ラグランジュ・オイラー有限要素法による大規模スロッシング解析に関する研究，中央大学学位論文，1992
- 5) 桜庭雅明，田中聖三，榎山和男: PC クラスタを用いた ALE 並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析，応用力学論文集，Vol.4, pp.113-120, 2001