

# 共役勾配法とLDU分解法の性能に関する一考察

東海大学大学院 学生会員 菅家 寿幹  
東海大学 正会員 島崎 洋治

## 1.はじめに

有限要素法では計算の大部分が連立一次方程式を解くことに費やされるため、この方程式をいかに早く解くかが効率化の鍵となる。

有限要素法で生成される剛性マトリクスは多くのゼロ要素を含み、マトリクスの対角要素付近に非ゼロ成分が集まった疎な形をしている。したがって、連立一次方程式を解く際には、演算に関与しないゼロ成分を記憶せず演算をスキップするなどの工夫がおこなわれる。それによって記憶容量、計算時間の双方にメリットをもたらす事ができる<sup>1)</sup>。

剛性マトリクスの記憶法としてよく知られているバンド法では、全体剛性マトリクスの最大バンド幅の分だけ領域を用意し記憶する。これは、全体剛性マトリクスが対角付近に帯(バンド)状になっていることを利用している。n次元連立一次方程式を解くのに必要なマトリクスのサイズは最大バンド幅(I B) × nとなる。しかしI Bは節点番号の付け方によって変化し、場合によっては必要以上に多くのゼロ要素を含んで記憶しなければならない場合があり、計算の効率化が図れないことがある。またスカイライン法はこの欠点を補った方法であるが、すべてのゼロ成分を排除することはできない。

本研究では、PCG法<sup>2)</sup>のためのゼロ成分を含まない剛性マトリクスの記憶法を提案し、例題として三角形ひずみ要素を用いたボアソン方程式を解き、提案する方法とバンド法を用いたLDU法との効率を比較する。

## 2. PCG法のための記憶方法

図1はPCG法のための記憶方法を示した図である。

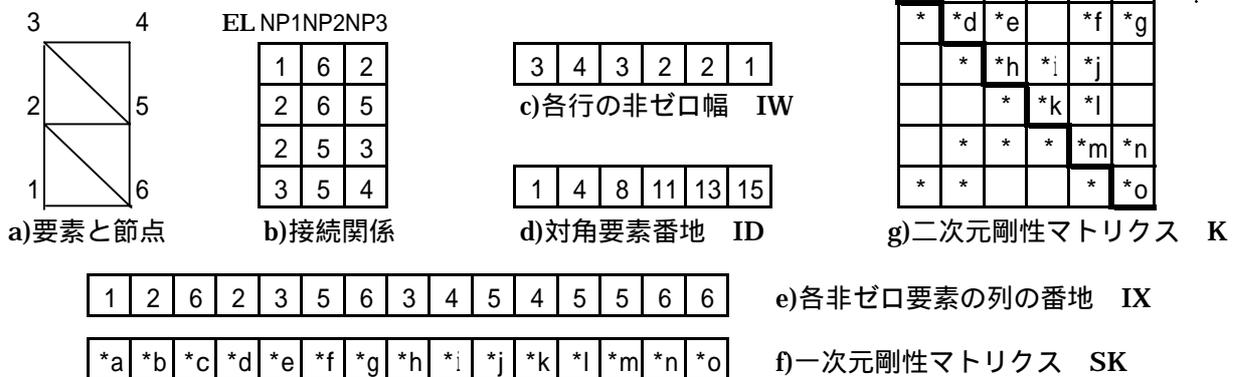


図1 PCG法のための記憶

図1a)は説明のための例題である。また、図1b)は例題の要素と節点の接続関係を示してある。図1a)を参考にすると図1g)のようなマトリクスKを得ることができる。本方法ではKを図1f)のように一次元剛性マトリクスSKとして記憶する。図1c)のIWは図1d)に示すKの各行の非ゼロ成分の総数を収納する。例えばKの2行目なら、\*d、\*e、\*f、\*gで合計4である。図1d)のIDには、SKに収納されているKの対角要素の番地を記憶する。図1e)のIXは、各非ゼロ成分がKの何列目にあるかを示す。例えばKの\*b、\*c、\*jのIXはそれぞれ2、6、5である。このようにIDは二次元剛性マトリクスKの行の情報を、IXはKの列の情報を収納する。これらのIDやIXを用意する事で、比較的簡単にゼロ成分を含まない一次元の剛性マトリクスSKを作成する事が出来る。この方法によってPCG法の繰り返し計算を効率よく行う事ができる。

キーワード 共役勾配法、LDU分解法、記憶法  
連絡先 東海大学 平塚市北金目1117 0463 - (58) - 1211 (代表)

### 3. 例題

図2は例題で、解こうとするポアソン方程式のための解析領域と境界条件である。ここでは2で示したPCG法とバンド法を用いたLDU法のそれぞれで解析を行い、その計算時間を比較する。比較は次に示す条件で行う。

50要素から64,800要素までの範囲で要素数を変えて測定する。

解析領域は正方形である。これを縦、横に同数ずつ分割する。分割数2の場合の例を図2b)に示す。また、同図には節点番号の振り方も示してある。この方法では、分割数+3がバンド幅になる。例えば図2のように縦横ともに2分割するとバンド幅は5となる。また、分割数\*分割数\*2で総要素数となる。

PCG法の収束判定値は  $= 1.0 \times 10^{-3}$ とした。

プログラムはExcelのVBAで作成し、時間の測定にはVBAのTime関数を使用した。各解析は計算時間の誤差を少なくする為、各10回ずつ連続して行い10回の平均時間で判定する。

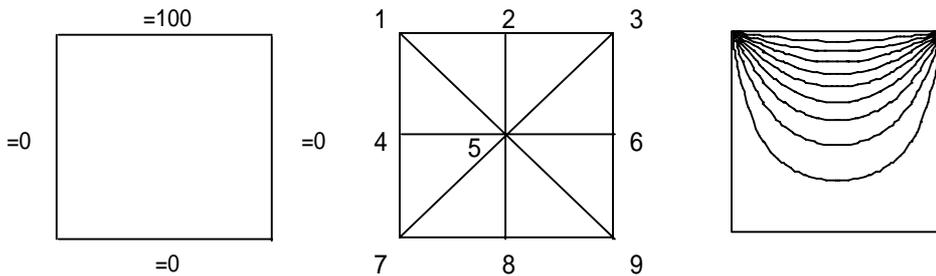


図2  
解析領域と有限要素

a)解析対象と境界条件 b)要素と節点番号の振り分け方 c)解析結果の例

### 4. 解析結果

PCG法, LDU法共に計算部分のみの時間と、計算部分とさらに前処理や計算の準備、計算後の処理なども含めた全体の時間の二つを測定した。結果を図3に示す。図3の縦軸は一回当たりの計測時間、横軸は節点数である。また、コンピュータはモバイルPentiumプロセッサ700MHZ、メモリが384MBのものを使用した。

図よりLDU法は要素数の増加に伴いIBも増加し、二次の放物線状に計算時間が増えていくのに対し、PCG法は傾きがほぼ一定の直線的になることが分かる。

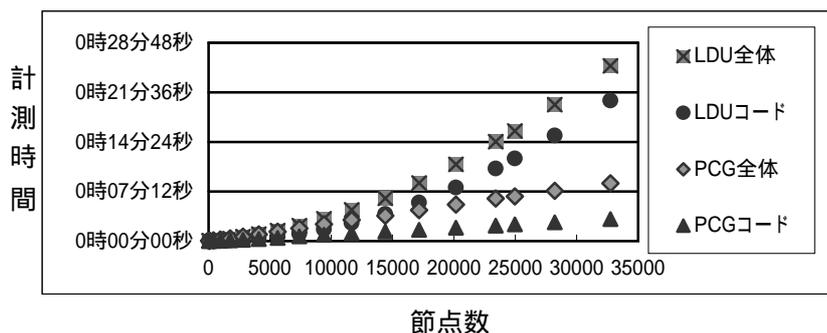


図3  
解析結果

### 5. おわりに

本方法を用いたPCG法は、節点数と要素数が少ないときはLDU法に速度で劣るものの、バンド幅がある程度多くなってくるとLDU法よりも相当早くなる。本報告では、計算量が多くなるほど提案する方法の有効性を示す事が出来た。

<参考文献>

- 1) 小国 力編著、“行列計算ソフトウェア WS、スーパーコン、並列計算機”丸善株式会社1993
- 2) 戸川 隼人、“シリーズ 新しい応用数学 共役勾配法”教育出版株式会社1997



