

# Wavelet 境界要素法における切り捨て基準値の実用的な決定法

新潟大学大学院 正会員 紅露一寛  
新潟大学工学部 正会員 阿部和久

\*†

## 1. はじめに

近年、境界要素解析の効率化を図る高速解法が提案されており、その一つに wavelet 境界要素法 (wavelet BEM)<sup>1)2)</sup> がある。Wavelet BEM は、境界積分方程式の離散化にゼロモーメント性 (所定次以下のモーメントを 0 にする性質) を有する wavelet 基底を用いる手法である。Wavelet の導入により係数行列成分の大半は微小成分となり、これらを切り捨て (0 とみなす) ことで係数行列をスパース化する。そのため、wavelet の利用による境界要素解析の効率化の成否は係数成分の切り捨て基準値の設定に左右されることとなる。切り捨て基準値は解析に先立って予め設定しておく必要があるが、現段階ではこれらを系統的に設定する手法はなく、解析の際には経験的に決めざるを得ない。そこで本研究では、wavelet BEM で用いられる切り捨て基準値の実用的な決定方法を構成する。なお、wavelet BEM における切り捨て手法は 2 種類あるが、本手法では Beylkin らの方法<sup>2)3)</sup> で使用する切り捨て基準値を対象とする。

## 2. Wavelet BEM

以下においては、ポテンシャル問題における境界積分方程式について考える。まず、方程式の未知量であるポテンシャル  $u$  と流束  $q = \partial u / \partial n$  を次の wavelet 展開  $\tilde{u}, \tilde{q}$  で近似する<sup>1)2)</sup>。

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_k} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}, \quad \tilde{q} = \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_k} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}, \quad (1)$$

ここで、 $\phi_{0,j}, \psi_{k,l}$  はそれぞれ scaling 関数、wavelet であり、本研究では Fig.1 に示す Haar 基底を用いる。なお、Haar wavelet は 1 次のゼロモーメント性を有している。さらに、 $n_s, n_k$  はそれぞれ階層 0 の scaling 関数、階層  $k$  の wavelet に関する展開項数であり、 $m$  は最高解像度である。また、 $\hat{u}_{0,j}, \tilde{u}_{k,l}, \hat{q}_{0,j}, \tilde{q}_{k,l}$  は展開係数である。

式(1)を境界積分方程式に代入し、 $\phi_{0,j}, \psi_{k,l}$  を用いた Galerkin 法を適用すると、次の連立一次方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad g_{ij} = \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} u^* w_j d\Gamma^2, \quad h_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i w_j d\Gamma + \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^* w_j d\Gamma^2, \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ( $N$ : 自由度) は係数行列であり、 $g_{ij}, h_{ij}$  はそれらの成分である。また、 $\mathbf{u}, \mathbf{q}$  はそれぞれポテンシャル、流束に関する展開係数からなるベクトルである。なお、 $w_i, w_j$  は  $\phi_{0,j}, \psi_{k,l}$  のいずれかで与えられるものとし、 $u^*, q^*$  は基本解である。 $\Gamma$  は境界を表わす。

係数成分の切り捨ては、式(2)の係数  $g_{ij}, h_{ij}$  を対象に実行し、次の条件を満足したもののみを切り捨てる<sup>2)</sup>。

$$|g_{ij}| < \tau \cdot G_{max}, \quad |h_{ij}| < \tau \cdot H_{max}, \quad (3)$$

式(3)において、 $\tau$  は切り捨て基準値であり、この値を本手法で定める。また、 $G_{max}, H_{max}$  は係数成分  $g_{ij}, h_{ij}$  の絶対最大値である。

ここで、式(2)の代数方程式を整理すると、未知ベクトル  $\mathbf{x}$  に関する次の方程式を得る。

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \Delta\mathbf{b}, \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{A}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{b}}$  は切り捨てを行わずに得られる係数行列、未知・既知ベクトルである。一方、 $\Delta\mathbf{A}$  は  $\mathbf{A}$  の切り捨て成分であり、 $\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{b}$  は切り捨てによって  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{b}}$  に混入する誤差ベクトルである。

## 3. 切り捨て基準値 $\tau$ の決定

式(3)の切り捨て基準値  $\tau$  を決定するにあたり、本手法では近似解に含まれる離散化誤差と切り捨て誤差とが同水準となることを要請する。なお、2 種類の誤差は残差ノルムを用いて間接的に評価する。このとき、切り捨て誤差は残差ノルム  $\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\|$  で表わせる。一方、離散化誤差は式(4)の残差方程式  $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{R}$  ( $\mathbf{e}$ : 離散化誤差ベクトル) の右辺の残差ベクトル  $\|\mathbf{R}\|$  で評価できる。

まず、基準値  $\tau$  を用いて切り捨てを行なう場合、残差ノルムについて次式が成り立つものとする。

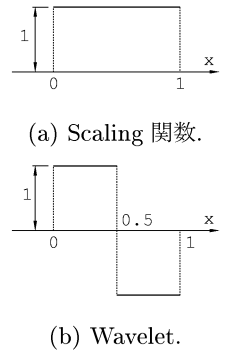


図-1 Haar wavelet.

$$\frac{\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{u}\|} \simeq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (5)$$

ここで、式(5)において  $\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{u}\|$ ,  $\|\mathbf{R}\|/\|\mathbf{u}\|$  が次式で近似できるものとする.

$$\frac{\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{u}\|} \simeq 2\tau \cdot \|\mathbf{H}\|, \quad \frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{u}\|} \simeq \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{u}\|} \simeq \alpha N^{-\beta}, \quad (6)$$

なお、ベクトル  $\mathbf{c}$  の成分  $c_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) は次式で与える.

$$c_i := -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\hat{u} - \tilde{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^*(\hat{u} - \tilde{u}) d\Gamma^2, \quad (7)$$

ただし、 $\hat{u}$  は真の解  $u$  の wavelet 展開であるため、一般に  $\|\mathbf{c}\|/\|\mathbf{u}\|$  の値は近似評価されることとなる.

ここで、式(6)を式(5)に代入すると、切り捨て基準値  $\tau$  は次式を用いて決定できる.

$$\tau = \frac{1}{2\|\mathbf{H}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{u}\|} \simeq \frac{\alpha N^{-\beta}}{2\|\mathbf{H}\|}, \quad (8)$$

式(8)において、定数  $\alpha, \beta$  は小自由度のもとでの境界要素解析で得られた近似解から決定すればよい. このとき、十分小さい自由度を設定すれば基準値  $\tau$  を決定するための計算量はわずかなものとなる. また、この計算の中で  $\|\mathbf{H}\|$  の近似値も同時に評価できる. なお、式(8)より設定した基準値  $\tau$  の下で係数成分を切り捨てた場合、式(2)の行列  $\mathbf{G}, \mathbf{H}$  の保存成分数はそれぞれ  $O(N^{1+\gamma_1}), O(N^{1+\gamma_2})$  となる. ただし、 $\gamma_1, \gamma_2$  は式(6)で定義された  $\beta$  と wavelet のゼロモーメント次数によって定まる定数である<sup>4)</sup>.

#### 4. 本手法で設定した切り捨て基準値の妥当性

式(8)で設定した切り捨て基準値の妥当性を検討する目的で、図-2に示す境界条件を有した2次元ポテンシャル問題に対して本手法を適用した. 解析においては、式(8)の定数  $\alpha, \beta$  を決定するために40, 80自由度の境界要素解析を一度ずつ行なった.

まず、式(8)より与えた基準値  $\tau$  と経験的に探索した切り捨て基準値とを比較してみる. 解析結果を図-3に示す. なお、経験的に探索した基準値とは、近似解の誤差が離散化誤差と同程度となる切り捨て基準値の中で最大のものを数値実験から割り出した値を指す. 両者を比較すると、双方が近接した値をとるものの、自由度によっては式(8)は実際に設定すべき切り捨て基準値よりも大きめに見積もる傾向が認められる. 今回採用した切り捨てアルゴリズムでは、基準値を大きく設定するほど多数の係数成分が切り捨てられる. そのため、式(8)より与えた基準値を使用して係数行列を圧縮した場合、近似解の精度低下が懸念される. そこで、上述の2種類の切り捨て基準値の下で得られた近似解の精度についても比較する. ここで、近似解の誤差ノルムを表-1に示す. 式(8)は解の誤差を増大させる方向に切り捨て基準値を与えるものの、実際の解析においては誤差ノルムはほとんど変わらないことがわかる. 以上の結果より、本手法で与えた切り捨て基準値は妥当なものであることが確認できた.

次に、各自由度に対応する係数行列の保存成分数を図-4に示す. 解析時の保存成分数は全成分を保存した場合を大きく下回り、文献<sup>4)</sup>で示されるように  $O(N^{1.19})$  ( $\mathbf{G}$  行列),  $O(N^{1.02})$  ( $\mathbf{H}$  行列) となった. 本研究では Beylkin のアルゴリズムを対象としているため、保存成分数は文献<sup>1)</sup>の場合のように  $O(N(\log N)^a)$  ( $a > 0$ ) とはならない. しかし、係数行列の圧縮率は1%以下にまで抑えることができ、実際の解析における計算効率の改善効果は十分期待できる.

#### 参考文献

- 1) Lage, C. & Schwab, C.: Wavelet Galerkin algorithm for boundary integral equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.20, No.6, pp.2195–2222, 1999.
- 2) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
- 3) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transform and numerical algorithm I. *Comm. Pure & Appl. Math.*, Vol.44, pp.141–183, 1991.
- 4) Koro, K. & Abe, K.: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2003. (in press)

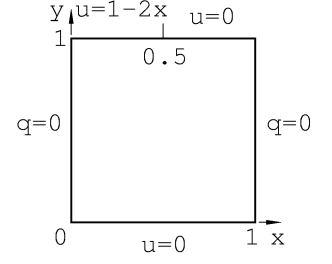


図-2 解析条件.

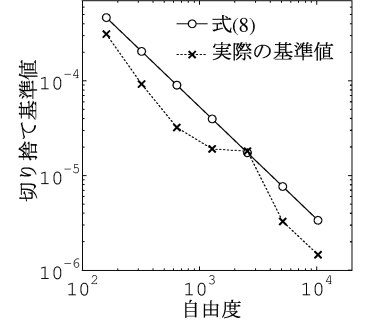


図-3 切り捨て基準値  $\tau$ .

表-1 切り捨て実行時の近似解の誤差.

| 自由度   | 式(8)を使用                | 離散化誤差                  |
|-------|------------------------|------------------------|
| 160   | $9.639 \times 10^{-3}$ | $9.526 \times 10^{-3}$ |
| 320   | $5.499 \times 10^{-3}$ | $5.464 \times 10^{-3}$ |
| 640   | $3.090 \times 10^{-3}$ | $3.091 \times 10^{-3}$ |
| 1,280 | $1.768 \times 10^{-3}$ | $1.729 \times 10^{-3}$ |
| 2,560 | $9.661 \times 10^{-4}$ | $9.604 \times 10^{-4}$ |
| 5,120 | $5.374 \times 10^{-4}$ | $5.535 \times 10^{-4}$ |

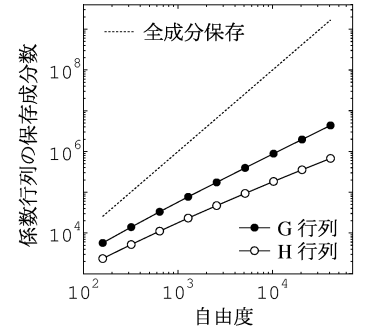


図-4 係数行列の保存成分数.