

# Lagrange 多項式を用いた EFGM 三次元弾性解析

足利工業大学大学院

学生員

大須賀 淳

足利工業大学都市環境工学科

正会員

末武 義崇

## 1. はじめに

要素分割を必要としない新しい数値解析手法として、エレメントフリー法 (EFGM) は多くの研究報告なされている。筆者らは、Lagrange 多項式に基づく新たな EFGM を考案し、薄板の有限変位問題を中心に種々の構造解析に適応し、厳密解や有限要素解との比較を通じ、その妥当性や有用性を明らかにしてきた<sup>1)</sup>。

本研究では、これまでに構築してきた EFGM を拡張し、三次元弾性解析に適用可能となるよう再定式化を図った。解析対象として厚板の曲げ問題を選択し、Reissner-Mindlin 理論に基づく厚板の Fourier 解析および三次元 FEM 解析との比較を通じ、本手法の妥当性・有用性について定量的な検討を行った。

## 2. Lagrange 多項式を用いた離散化

図 1 に示すような、評価点  $(\xi, \eta, \zeta)$  を中心とする、1 辺の長さが  $2\rho$  の立方体をサポート領域と考える。評価点近傍の無次元化変位  $\omega(\xi, \eta, \zeta)$  は、サポート領域内の  $(N+1)^3$  個の節点値  $\omega_{ijk}$  ( $i, j, k = 0 \sim N$ ) を用いて次式で表現される。

$$\omega(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \omega_{ijk} \varphi_i(\xi) \psi_j(\eta) \chi_k(\zeta) \quad (1)$$

ここに、 $\varphi_i(\xi)$ 、 $\psi_j(\eta)$  および  $\chi_k(\zeta)$  は Lagrange 基底であり、例として  $\varphi_i(\xi)$  の定義式を示すと次式の通りである。

$$\varphi_i(\xi) = \prod_{m=0}^N X_{m,i}; M_{m,i} = \begin{cases} 1 & (m=i) \\ (\xi - \xi_m) / (\xi_i - \xi_m) & (m \neq i) \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) で表される Lagrange 多項式を用いれば、評価点  $(\xi, \eta, \zeta)$  における変位およびその偏導関数は、次式のように離散表示することができる。

$$\omega(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_0^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \partial_{\xi} \omega(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \partial_{\eta} \omega(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_2^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \partial_{\zeta} \omega(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_3^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{B}_n$  は Lagrange 基底およびその微分からなる係数ベクトルであり、各偏微分演算子に対応している。また、 $\boldsymbol{\omega}$  は評価点近傍の節点変位ベクトルである。式 (3) を用いれば、任意の評価点における関数値および微分値を、サポート領域内の節点値で直接的に表現することができる。

変分原理に基づく定式化において、対象とする領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点を評価点と見なして式 (3) を用いることで、汎関数を離散化することができる。また、結果として求めた節点値を式 (3) に代入すれば、任意の評価点における数値解を計算することができる。しかも、ここで定式化した離散化課程においては、FEM のように“要素”という固定した枠内で節点値を補関して積分点の値を評価するのではなく、積分点近傍すなわち“サポート領域”内部の節点値によって積分点の値を直接的に表現するため、“要素分割”という概念が不要となる。

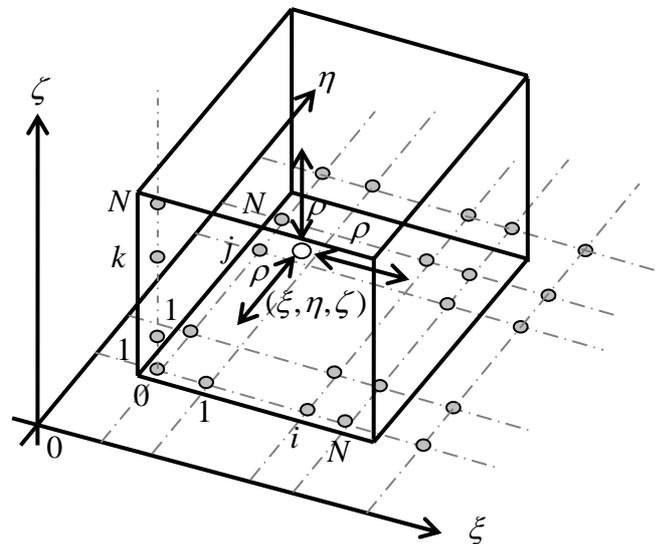


図 1. 評価点近傍のサポート領域

### 3. 解析モデル

本研究では、図2に示すような厚板モデルを解析対象とした。変位境界条件としては、周辺単純支持板に対応するように、板中央面周辺の変位のみを全ての方向についてゼロとした。荷重については上面全体に等分布荷重を作用させた。解析モデルの寸法・材料定数は、縦横比 $b/a=1$ 、幅厚比 $t/a=0.2$ 、Poisson比 $\nu=0.3$ とした。EFGM解析に際しては、総節点数を $5 \times 5 \times 5 = 125$ とし、セル総数を $5 \times 5 \times 5 = 125$ 、Gauss積分次数を6、サポートパラメータを $\rho=1.3$ として解析を行った。解析結果の妥当性を検証するために、厚板理論に基づくFourier解析とFEM解析を実施した。FEM解析に際しては、汎用プログラムMARCを使用し、要素タイプを8節点立体要素とした。

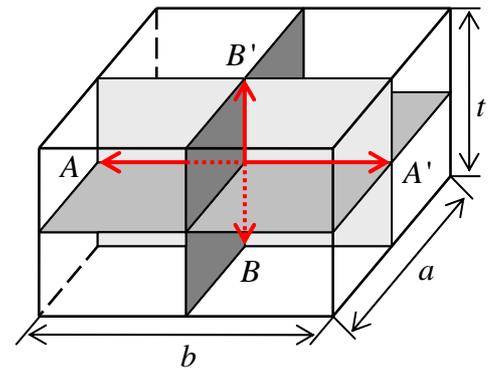


図2 解析モデル

### 4. 解析結果および考察

解析結果を図3、図4および図5に示す。図3は、図2におけるA-A'のたわみ形状に関する比較結果である。図中、横軸には水平座標 $\eta$ を、縦軸にはたわみ $w$ をそれぞれとって示した。図から明らかなように、三者ともほぼ一致した変形形状を示しており、EFGMによって良好な解析結果が得られたと考えることができる。また、EFGMによる解析結果は、FEM解析よりも、Fourier級数解に近い結果になっていることがわかる。

図4および図5は、EFGMおよびFEMの数値解を比較したものである。図中 $\varepsilon$ は、Fourier級数解 $w_F$ を基準としたときの数値解 $w$ との差異を表している。図4は図2のA-A'における差異の比較であり、横軸に水平座標 $\eta$ 、縦軸に解析結果の差異 $\varepsilon$ をとって示した。図を見ると、EFGMおよびFEM共に、モデルの中央部においてはFourier級数解と比較的近い値が得られているものの、周辺部においては、級数解からずれる傾向が認められる。図5は、図2のB-B'における差異を比較した結果である。横軸に差異 $\varepsilon$ 、縦軸に鉛直座標 $\zeta$ をそれぞれとって図示した。図から明らかなように、解析モデルの上下面においては、中央面よりもさらにFourier級数解と数値解との差異が小さくなることがわかる。

### 5. まとめ

Lagrange多項式に基づくEFGMを用いて厚板の三次元弾性解析を実施した結果、Fourier級数解とほぼ一致した数値解が得られた。FEM解と比較すると、若干の差異は認められたものの、定性的には概ね一致した結果が得られている。以上の比較結果は、本研究のEFGMの三次元弾性解析に対する適用可能性を示唆するものと考えられる。解析手法としての妥当性を検証するためには、より広範囲なパラメータ解析を実施する必要がある。

#### 参考文献

1) Y.Suetake : Element Free Method based on Lagrange Polynomial , J. of Eng. Mech. , ASCE , Vol.128 , No.2 , pp.231-239 , 2002.2.

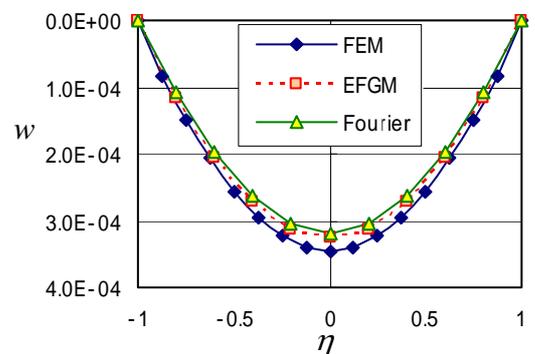


図3 A-A'のたわみ形状の比較

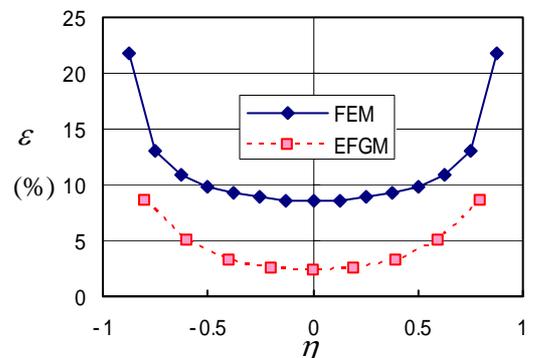


図4 A-A'における差異の比較

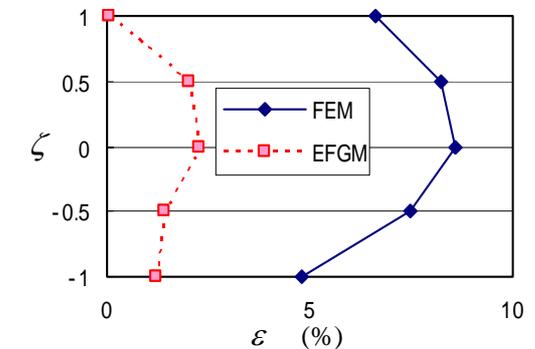


図5 B-B'における差異の比較