(Ⅲ－11) 円形介在物を有する弾性体および粘弾性体の力学解析に関する研究

株式会社コミヤマ工業　○学生会員 宮川 睦巳
山梨大学学生　学生会員 桂 千代
山梨大学教授　正会員 平島 健一

1.緒 言

様々な複合材料が開発されてきたという歴史的な背景からも、材料の持つ性能を最大限に生かし、対象となる構造物に対し、十分な機能が発揮できるように最適な材料設計・製造が最も大切である。 これらの複合材料は必ず異なる材料との接合界面を作り出すが、これらの複合材料が界面での剥離や介在物または媒体の破損を伴わずに十分な機能を発揮すると共に材料の特性を改名し、その力学特性評価を実施することが必要となる。

本研究では、無限弾性媒体内に円形弾性介在物が存在し、その介在物内に特異荷重が作用する問題の解析解を求める。 ここで取り扱う特異荷重とは、面外集中力、らせん転位の場合である。この特異荷重の作用点について、介在物内の任意位置に作用する問題も取り扱うことができる。 また、この問題を発展させて、特異荷重が作用する介在物の他に、個々に異なる多数の円形弾性介在物が存在する問題に対しても定式化を行う。

粘弾性挙動を考慮することによりクリープやリラクゼーションの応力・変位解析も可能になる。 その力学的挙動を表現する様々な型の粘弾性モデルがあるが、ここでは汎用性の高いBurgersモデルを採用して、様々な粘弾性特性をもつ材料を取り扱う。 粘弾性体に対する対応原理によれば、弾性体の解析解がそのままここで対象とする粘弾性体における Laplace 変換解となる。 この手法を用いて一般解を誘導し、代表的な数値計算例を示す。なお、本研究は複合材料の繊維要素を介在物に見立て、軸力による面外荷重問題の基礎資料となることを目的とする研究の一環となるものである。

2.基本公式

対象となる応力および変位成分はxy平面に垂直な方向（奥行き方向）の座標をzとして、面外せん断応力τ_{xz}、τ_{yz}および面外変位u_zであり、いずれも面内座標(x,y)の関数である。釣合式、幾何式は弾性体のみならず、粘弾性体の場合も全く同一のものが成立する。 すなわち応力、ひずみ成分をτ_{ij}、ε_{ij}とすれば、次式が成立する。

$$\tau_{ij,j}=0\ ,\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここに、テンソルの和の規約が適用されており、コンマはその後の添字の座標での偏微分を意味する。 なおu_iは変位成分である。これに対して、構成式は線形弾性体の場合には(2)式のHookeの法則が成立する。

$$\tau_{ij}=2\mu\,\varepsilon_{ij}+3\lambda\delta_{ij}e\,,\ s_{ij}=2\mu e_{ij}\ ,\ \sigma=3Ke\,. \quad (2)$$

ここに、応力成分τ_{ij}は偏差成分s_{ij}と体積成分σに分解されたものであり、ひずみ成分ε_{ij}も次のように偏差成分e_{ij}と体積成分eに分解されたものである。これに対し、粘弾性の場合には各種の粘弾性モデルによって異なった時間依存の応力・ひずみ関係式が成立することになる。

$$\left.\begin{aligned}&P_1(D)P_2(D)\tau_{ij}=Q_1(D)P_2(D)\varepsilon_{ij}\\&\qquad+\frac{1}{3}\delta_{ij}[P_1(D)Q_2(D)-Q_1(D)P_2(D)]\,e,\\&P_1(D)S_{ij}=Q_1(D)e_{ij},P_2(D)\sigma=Q_2(D)e\,.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (4)$$

ここに、Dは$\partial/\partial t$なる微分演算子であり、$P_k(D)$ $Q_k(D)$ $(k=1,2)$は各種の代表的な粘弾性モデルに対して、具体的にあたえられている。本研究では応力の偏差成分に関してBurgersモデルを、体積成分に関してはElasticモデルを採用することにする。

<u>応力・変位を求める公式</u>

円形境界Lを有する無限遠に広がった領域を複素平面$z=x+iy$とする。円形境界Lを有する極座標系(r,θ)の任意点における応力・変位を求める公式は複素関数$\phi(z)$を用いて次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}&\tau_{\theta z}+i\tau_{rz}=(\tau_{yz}+i\tau_{xz})e^{i\theta}=\phi'(z)e^{i\theta},\\&u_z=\frac{1}{\mu}\mathrm{Im}[\phi(z)]\ ,\ e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\,.\end{aligned}\quad\cdots\cdots (5)$$

ここに、Imはかっこ内の虚部を、またプライムは複素変数zによる微分を意味する。

キーワード：粘弾性体問題、特異荷重、複数の円形介在物

連絡先：山梨県甲府市武田４－３－１１　山梨大学工学部土木環境工学科平島研究室

3. 介在物に特異荷重が作用する問題

1 個の介在物を有する基本解の誘導を行う。 図 1 に示した円形介在物 j (半径 : $r = a_j$、中心 : z_j) と無限に広がる媒体との境界 L_j ($i.e. z = z_j + a_j e^{i\theta}$) において、次のような通常の応力と変位の境界条件を設定する。

$$\tau_{rz}^{M} = \tau_{rz}^{j}, \quad u_z^M = u_z^j. \ \ at\ L_j \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

介在物内に、面外集中力もしくは、らせん転位の特異荷重(作用点 : z_0)が作用する場合の解析解を求める。

媒体に対して、

$$\phi_M(z) = b_z^M\, ln(z - z_0) + \alpha_j\, \overline{b_z^M\, ln(A_j z - A_j z_0)}\ , (7)$$

介在物 j に対して、

$$\phi_{Ij}(z) = b_z^{Ij}\, ln(z - z_0) - \alpha_j \overline{b_z^{Ij}\, ln(\bar{z} - A_j z_0)} + \mu_{Ij}\frac{\mu_{Ij} - \mu_M}{\mu_M}\left[b_z^{Ij}\, ln(a_j) - b_z^{Ij}\, Re\left[ln(z_0 - z_j)\right]\right]. \cdots (8)$$

$$b_z^M = \tfrac{1}{2}\left[\mu_M[u_z] - iZ\right],\ b_z^{Ij} = \tfrac{1}{2}\left[\mu_{Ij}[u_z] - iZ\right].$$

式(7)、(8)は媒体中に単一の介在物が存在している場合である。

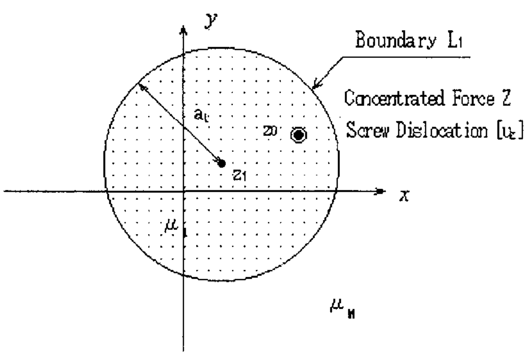

図1 介在物内に特異荷重が作用する問題

4. 複数の円形介在物を有する問題

前節で示した場合の解法を拡張して図 2 のような複数の介在物に対して順次解析接続をおこなう。Q 個の介在物を含む幾何配置の場合の境界 L_j ($j = 1, 2, \cdots Q$) に対して、式(6)の境界条件を満足するように Q 個の円形弾性介在物問題に対する複素関数が求められる。

5. 円形介在物を有する粘弾性体の力学解析

線形粘弾性体に対する対応原理によれば、弾性体に対する閉じた型の解がここで対象とするような粘弾性体に対する Laplace 変換解となる。 したがって、Laplace 変換した式(4)の粘弾性定数 $\tilde{\mu}$ 、$\tilde{\lambda}$ 、$\tilde{K}$ および、これらによって表される $\tilde{E}$ $\tilde{\nu}$ を Laplace 逆変換してそれらを代入すれば粘弾性解が得られる。ここに上付きのチルダは Laplace 変換を意味する。

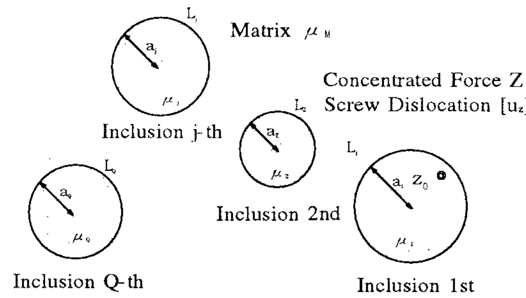

図2 複数の介在物が存在する問題

6. 数値計算例

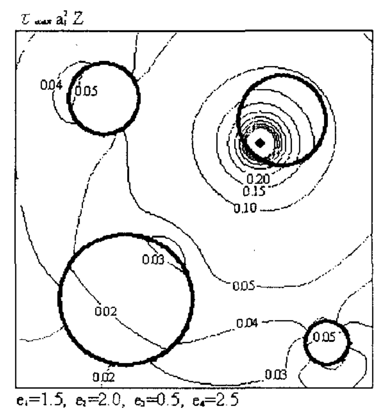

図3 任意な配置において集中力が作用する問題の最大せん断応力 τ max の分布図

図 3 に数値計算例を示すが、その他の数値計算例については当日会場で発表する。

7. 結 言

本研究では、無限弾性媒体内に円形弾性介在物が存在し、その介在物内に特異荷重が作用する問題の解析解を求めた。 ここで取り扱う特異荷重とは、面外集中力、らせん転位の場合である。この特異荷重の作用点について、介在物内の任意位置に作用する問題も取り扱うことができるようになった。 また、この問題を発展させて、特異荷重が作用する介在物の他に、個々に異なる多数の円形弾性介在物が存在する問題に対しても定式化を行った。さらに数値計算例として具体的な例題に対する応力・変位を求めると共に粘弾性を考慮した解析解の誘導を行った。