

山梨大学大学院 ○学生会員 中山 岳彦

山梨大学工学部 正会員 平島 健一

金沢大学大学院 学生会員 鈴木 拓雄

1. 緒言

円筒状の繊維複合材は製作の容易さや力学的諸特性の優れていることなどから各方面で多用されている。また、こうした動向に合わせて、繊維複合材を極異方性体として取り扱った理論解析が数多く実施されている。それらの理論解析としては、例えば、Lekhnitskii の著書がよく知られている。

しかしながら、この極異方性問題について、面内・面外問題を系統的に取り扱った論文は見当たらないのが現状である。

そこで本論文では、具体的な極異方性弾性体問題の解析解を導き、さらに数値計算の結果を示す。

2. 極異方性弾性体の基礎関係式

まず面内問題とは通常の平面応力、平面ひずみ状態に対する問題であり、面外せん断問題とは St. Venant の単純ねじり問題に代表されるような座標 z に関係するせん断応力、およびせん断ひずみ成分のみが存在する問題である。さらに、これらの面内・面外せん断問題を重ね合わせることで準 3 次元的な取り扱いが可能となる。以下にそれぞれの問題についての基礎関係式を示す。

2.1 面内問題

(I) 釣合方程式

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1)$$

(II) 幾何関係式

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (2)$$

さらに上式より、ひずみ成分 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ は次式の適合条件式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3)$$

(III) 構成関係式

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ & a_{22} & 0 \\ sym. & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに平面応力状態で弾性コンプライアンス a_{ij} は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_r}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}, \\ a_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

また、平面ひずみ状態に対しては、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}{E_r}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{r\theta} + \nu_{\theta r} \nu_{\theta\theta}}{E_\theta}, \\ a_{22} &= \frac{1 - \nu_{\theta r} \nu_{\theta\theta}}{E_\theta}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

上式において E_r および E_θ はそれぞれ半径方向および円周方向の弾性係数であり $G_{r\theta}$ は $r-\theta$ 面内のせん断弾性係数、 ν_{kl} は k 方向に応力を受けたときの k 方向のひずみとそれに直交する l 方向のひずみの比に関するポアソン比である。

(IV) Airy の応力関数

釣合方程式(1)を満たすように Airy の応力関数 $F(r, \theta)$ を以下のように導入する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

(V) 支配方程式

式(7)を式(4)に代入し、それを式(3)に代入することにより次の支配方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & a_{22} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \right) \\ & - a_{11} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} \right) \\ & + (2a_{12} + a_{66}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right) \\ & + (2a_{11} + 2a_{12} + a_{66}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

キーワード：極異方性弾性体問題、応力関数、解析解

連絡先：山梨県甲府市武田 4-3-11 山梨大学土木環境工学科 平嶋研究室

2.2 面外せん断問題

(I) 釣合方程式

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (9)$$

(II) 幾何関係式

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (10)$$

上式より、ひずみ成分 $\gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$ は次式の適合条件式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \gamma_{\theta z} = 0. \quad (11)$$

(III) 構成関係式

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & 0 \\ 0 & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 a_{44} および a_{55} は極異方性体のせん断弾性コンプライアンスであり、せん断弾性係数 $G_{\theta z}, G_{rz}$ と次の関係がある。

$$a_{44} = \frac{1}{G_{\theta z}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{rz}}. \quad (13)$$

(IV) Prandtl の応力関数

面外の釣合方程式 (9) を満たすように Prandtl の応力関数 $\phi(r, \theta)$ を以下のように導入する。

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (14)$$

(V) 支配方程式

式 (14) を式 (12) に代入し、それを式 (11) に代入することにより次の支配方程式が得られる。

$$a_{44} \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + a_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (15)$$

3. 無限媒体に荷重が作用する 3 種の問題設定

図 1 のように原点を中心とした半径 a の円孔を持つ無限媒体を考える。ただし、極異方性の原点と座標の原点は一致している。

Case 1 は $(x, y) = (a, 0)$ に z 方向に一樣な放射方向の集中荷重 P_1 が作用する場合であり、Case 2 は $(x, y) = (a, 0)$ に z 方向に一樣な接線方向の集中荷重 P_2 が作用する場合である。また、Case 3 は $(x, y) = (a, 0)$ に z 方向に一樣な面外せん断方向の集中荷重

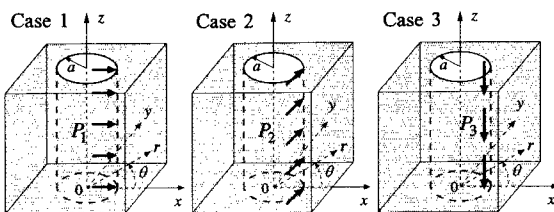


図 1 無限媒体に作用する荷重

P_3 が作用する場合を示す。これら 3 つの問題を解き重ね合わせることで任意の傾きを持った z 方向に一樣な荷重が作用した場合の結果が得られる。

4. 解析解

Case 1, Case 2 は面内問題、Case 3 は面外せん断問題として取り扱うことができ、それぞれの応力関数は次式ようになる。

Case 1

$$F = -\frac{P_1}{\pi} \left\{ \varphi r \sin \theta - k r \ln r \cos \theta - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta + \frac{a^{\alpha_0}}{2(1-\alpha_0)} r^{1-\alpha_0} - \frac{a^{\beta_1}}{2\beta_1} (1+2k) r^{1-\beta_1} \cos \theta \right\}. \quad (16)$$

Case 2

$$F = \frac{P_2}{\pi} \left\{ \varphi r \cos \theta + k r \ln r \sin \theta - \frac{1}{2} r \theta \cos \theta + \frac{a}{2} \theta + (2k+1) \frac{a^{\beta_1}}{2\beta_1} r^{1-\beta_1} \sin \theta \right\}. \quad (17)$$

Case 3

$$\phi = \frac{P_3}{2\pi} \left(\theta + 2 \tan^{-1} \frac{s \cdot \sin \theta}{1-s \cdot \cos \theta} \right). \quad (18)$$

ここに φ は点 $(x, y) = (a, 0)$ における x 軸からの角度であり、上式の各係数は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \quad G_1 = \frac{1}{a_{22}} (a_{11} + 2a_{12} + a_{66}), \\ \beta_1 &= \sqrt{(1+G_1)}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}, \\ s &= \left(\frac{a}{r} \right)^\lambda, \quad k = \frac{(a_{11} + a_{12})}{(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{66})}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上述の応力関数を 2 章で示した式に代入することにより、各物理量についての解析解を得ることができる。

5. 数値計算結果

ここでは Case 1 を用いて媒体を円筒状に補強したのとして弾性定数を $E_\theta / E_r = 5$ に設定した場合の $\tau_{\max}$ の分布図を示す。他の数値計算例は講演当日に示すものとする。

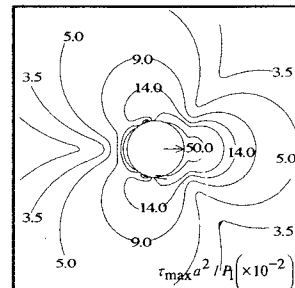


図 2 Case 1 の $\tau_{\max}$ の分布図