

山梨大学大学院

(株) 清水建設技術研究所

山梨大学工学部

○学生会員 松土 雄仁

正会員 熊坂 博夫

正会員 平嶋 健一

1. 緒言

地盤や岩盤など、不均一性をもっているような材料の微視的構造による力学特性を連続体理論に組み込むためのマイクロメカニクスに関する研究が従来から盛んに行なわれている。

そのうちのひとつに、非局所理論やひずみ勾配理論などの、材料内の遠隔粒子間の影響を考慮する‘非局所性’の研究が挙げられる。

非局所理論は、各種材料がもつ微細構造の力学特性について、連続体力学の概念を拡張して巨視的な力学特性として取り扱うことをねらいとしたものであり、遠隔作用的な効果を材料の力学特性に組み込むことを目指している。

本研究では、不均一な岩盤の力学特性を非局所理論を用いて評価することを目指して、岩盤力学の基本的な問題に対する各種の解析解を導出し、さらに数値計算を行うことによってその特性を考察する。なおここでは、半無限体内に三角形分布の線荷重が作用する場合についての解析解を導出し、さらに得られた数値計算結果に対して検討・考察を行う。

2. 基礎方程式とその特性

2.1 応力の定義 非局所理論における応力とひずみの関係は積分表示で次式のように表される。

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V C_{ijkl}(x, x') \varepsilon_{kl}(x') dv(x') \quad \dots (1)$$

ここに、 V は物体の体積であり、 x および x' は物体内の位置座標を表す。

上式は物体内に存在する位置 x の応力 $\sigma_{ij}(x)$ が、その位置のひずみ $\varepsilon_{kl}(x)$ のみの関係で決まるのではなく、物体内の全ての位置 x' から生じるひずみの影響を受けていることを表している。すなわち、非局所理論に基づいた応力 $\sigma_{ij}(x)$ は物体に作用する荷重、境界条件および境界形状などの影響を受けることになる。つまり、応力 $\sigma_{ij}(x)$ は遠隔作用性を有していることを意味している。

ところで、線形非局所弾性体の材料定数 $C_{ijkl}(x, x')$ は古典弾性理論の弾性係数 $C'_{ijkl}(x, x')$ と次のような対応関係がある。

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl}(x, x') &= \alpha(|x' - x|) C'_{ijkl}, \\ C'_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 λ と μ は Lamé の定数であり、 $\alpha(|x' - x|)$ は非局所係数である。

2.2 非局所係数 $\alpha(|x' - x|)$ について 一方方向への非局所性を有する材料には、非局所係数 $\alpha(|x' - x|)$ は三角形分布などが考えられる。例えば、格子力学では次の形の非局所係数 $\alpha(|x' - x|)$ が使われる。

$$\alpha(|x' - x|) = \begin{cases} K \cdot \left(1 - \frac{|x' - x|}{a}\right), & \text{for } |x' - x| \leq a, \\ 0, & \text{for } |x' - x| \geq a. \end{cases} \quad \dots (3)$$

ここに、 K , a は定数であり、特に a は $|x' - x|$ に対して基準化した量である。格子力学では一般に a の値は原子間距離として扱われているので、上式において $a \rightarrow 0$ の極限作用を行えば、非局所弾性理論の応力は、古典弾性理論の応力とほぼ等しくなる。すなわち、非局所性の効果は応力勾配の大きさなどで生じることになる。

3. 非局所弾性理論の基礎式と半無限弾性体の基本解の誘導方法

本節では半無限弾性体の平面問題の解法を取り扱うこととし、直交デカルト座標系として (x_1, x_2) を用いる。ただし、半無限領域は $x_2 > 0$ にあるとする。物体力を無視すると、釣合方程式は次式となる。

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (i, j = 1, 2). \quad \dots (4)$$

応力 $\sigma_{ij}(x)$ は変位 $u(x')$ の微分項により次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) &= \int_V \alpha(|x' - x|) C'_{ijkl} u_{k,l}(x') dv, \\ &= \int_V \alpha(|x' - x|) [\mu \{u_{i,j}(x') + u_{j,i}(x')\} + \delta_{ij} \lambda u_{k,k}(x')] dv. \end{aligned} \quad \dots (5)$$

ここで、 x_1 方向に関する $f(x_1, x_2)$ のフーリエ変換とその逆変換を次のように定義する。

キーワード：非局所性、岩盤力学、非局所係数、三角形分布の線荷重

連絡先：山梨県甲府市武田 4-3-11 山梨大学 土木環境工学科 平嶋研究室

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(k, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{ikx_1} dx_1, \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, x_2) e^{-ikx_1} dk. \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

釣合方程式をフーリエ変換することにより、応力テンソルのフーリエ変換は次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \cdot \left[-ik(\lambda + 2\mu) \hat{u}_{1,2}(k, x_2) + \lambda \hat{u}_{2,2}(k, x_2) \right] \\ \hat{\sigma}_{12}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \cdot \mu \cdot \left[\hat{u}_{1,2}(k, x_2) - ik \hat{u}_2(k, x_2) \right] \\ \hat{\sigma}_{22}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \cdot \left[(\lambda + 2\mu) \hat{u}_{2,2}(k, x_2) - ik \hat{u}_2(k, x_2) \right] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

一方、三角分布と仮定された非局所係数 $\alpha(x)$ のフーリエ変換 $\hat{\alpha}(k)$ は次式となる。

$$\hat{\alpha}(k) = \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) / \left(\frac{ka}{2}\right)^2 \dots\dots\dots (8)$$

これらより、変位 u_i のフーリエ変換は x_2 による2階の連立常微分方程式として次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \mu \hat{u}_{1,22} - ik(\lambda + \mu) \hat{u}_{2,2} - k^2(\lambda + 2\mu) \hat{u}_1 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \hat{u}_{2,22} - ik(\lambda + \mu) \hat{u}_{1,2} - k^2 \mu \hat{u}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

上式の連立常微分方程式を u について解き、応力のフーリエ変換式に代入すると次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \mu \left[-2Ak + Bi \left\{ 2kx_2 - (m^* - 3) \right\} \right] e^{-|k|x_2}, \\ \hat{\sigma}_{22}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \mu \left[-2Aik + Bi \left\{ 2kx_2 + (m^* + 1) \right\} \right] e^{-|k|x_2}, \\ \hat{\sigma}_{12}(k, x_2) &= \hat{\alpha}(k) \mu \left[2A|k| + B \left\{ 2|k|x_2 + (m^* - 1) \right\} \right] e^{-|k|x_2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ここに、 A, B は k, x_2 をパラメータとしてもつ境界条件によって定められる関数であり、係数 s は、 $k > 0$ のとき $s = +1$ を、また $k < 0$ のとき $s = -1$ をとるものとする。また、 m^* はポアソン比 ν により決まる。

4. 半無限体内に三角形分布の線荷重が作用した場合の解析解と数値計算例

前章(10)式のように求められた解析解に、図1のような場合における境界条件式を代入し、その非局所性を検討した。図2は、非局所係数の定数 a と、線荷重の作用長さ d_1, d_2 から、 d_1 との比 a/d_1 をパラメータとしてそれぞれ、0.1, 0.5, 1.0 としたときの応力 σ_{11} の分布を示したものである。

図2より、非局所係数が大きくなるにしたがって、線荷重近傍の応力集中や急激な応力勾配がなくなっていることや、遠方での応力勾配においても線荷重の影響が遠方に分散されていることがわかる。

5. 結論

今回、非局所弾性理論を用いて、応力の遠隔作用効果を表現できるかどうかについて検討した。

1次元非局所材料の Mindlin 解を用いて、半無限体内部に三角

形分布荷重が作用した場合における遠隔作用効果を表すことができた。

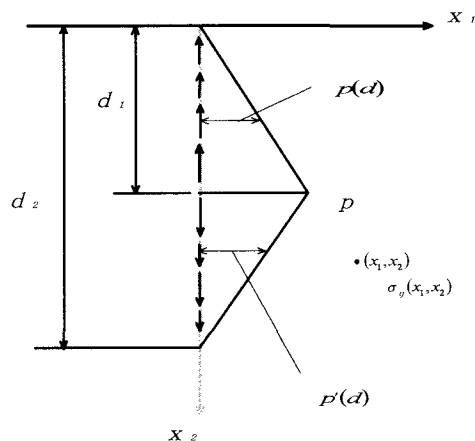
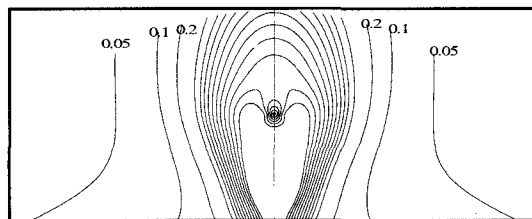
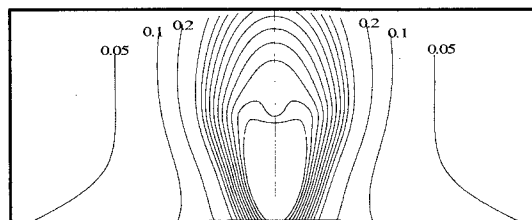


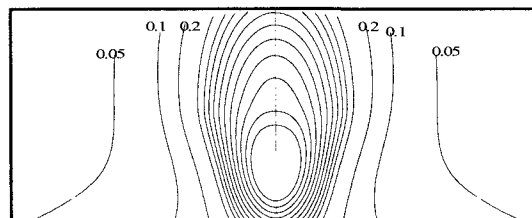
図1 解析モデル



(a) $a/d_1=0.1$



(b) $a/d_1=0.5$



(c) $a/d_1=1.0$

図2 三角形分布荷重 ($d_1=1.0, d_2=2.0$) による非局所応力 σ_{11} 分布