(II −52)　流体の密度を考慮した非線形波動方程式

東京大学大学院　学生会員　柿沼太郎

1. 序　論: 流体の密度の空間的・時間的変化を考慮した，波・流れ場解析のための鉛直積分型の完全非線形方程式を提案する．変分法を用いて導出された本方程式系は，平面２次元形を有しているため，数値計算が比較的容易である．また，流体の圧縮性を考慮するため，気体と液体の両相を含む流体運動に対して適用可能である．ここでは，非粘性流体の非回転運動を扱い，乱れや拡散並びに渦の効果を考えない．

2. 変分問題における汎関数の定義: 非粘性・圧縮性流体の非回転運動を対象とする．流体の種類や濃度の違いによる密度分布のみならず，圧縮性や熱膨張による密度変化も考慮する．流体の上面及び下面をそれぞれ $z=\zeta(\boldsymbol{x},t)$ 及び $z=b(\boldsymbol{x},t)$ とし，ζ, b がともに水平方向座標 $\boldsymbol{x}$ の１価関数であるとする．これら境界面において摩擦力が働かないと仮定する．いま，下面位置 b と上面における圧力 $p(\boldsymbol{x},\zeta,t)$ とがともに既知であるとする．すると，求める未知変数は，速度ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x},z,t)$, 流体の密度 $\rho(\boldsymbol{x},z,t)>0$, 圧力 $p(\boldsymbol{x},z,t)$ 及び上面位置 ζ となる．このとき，変分問題の作用 $\mathcal{F}[\phi,\rho,p,\zeta]$ を次式の汎関数とする．

$$\mathcal{F}[\phi,\rho,p,\zeta]=\int_{t_0}^{t_1}\iint_A\int_b^\zeta\left\{\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2+gz\right]+\Pi\right\}dz\,dA\,dt \tag{1}$$

ここで，$\nabla=(\partial/\partial x,\partial/\partial y)$ であり，$(\nabla\phi)^2\equiv|\nabla\phi|^2$ とする．平面 A は，対象領域の $x-y$ 平面への正射影であり，時間に関して変化しないとする．また，g は，重力加速度であり，質量力が重力のみであると仮定している．ここでは，表面張力による効果を重力の効果に比べて無視する．Π は，エンタルピー h の ρ に関する積分 $\int h\,d\rho$ である．式 (1) の $\mathcal{F}$ は，Luke (1967) の非回転運動に対する汎関数に $\iiiint \Pi\,dz\,dA\,dt$ を加えた形をしている．

3. 圧力関数: 運動が等エントロピー流れであると仮定する．すると，$\Pi=\int_{\rho_0}^{\rho}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}\,d\rho$ となる．すなわち，Π は，圧力関数 $\int\frac{dp}{\rho}$ の ρ に関する積分となる (Bateman, 1929)．ここで，$p_0=\mathrm{const.}$ 及び $\rho_0=\mathrm{const.}$ は，それぞれ，圧力及び密度の基準値である．

媒質が液体の場合，体積弾性率 $K\equiv\rho dp/d\rho$ が状態変化の過程によらずに一定であると仮定すると，圧力関数が $\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=K(\rho_0^{-1}-\rho^{-1})$ となる．従って，Π を次式のように定義する．

$$\Pi=K(\lambda-\ln\lambda-1),\quad \lambda=\rho/\rho_0 \tag{2}$$

液体と気体からなる２相流が等エントロピー流れである場合，液体の体積弾性率 K と気体の等エントロピー体積弾性率 K_s とをそれぞれの密度に応じて滑らかに連続させる．

等エントロピー流れを対象とする．すると，運動がバロトロピー流れとなり $(p=p(\rho))$，汎関数は，$\mathcal{F}=\mathcal{F}[\phi,\rho,\zeta]$ となる．適切な初期条件及び水平方向の境界条件のもとで任意の変分 $\delta\phi,\delta\rho$ 及び $\delta\zeta$ に対して $\mathcal{F}$ の第１変分が $\delta\mathcal{F}=0$ であるとき，各点における質量流速に関する連続方程式, 各点における Bernoulli の式, 上面における力学的境界条件, 上面における運動学的境界条件及び下面における運動学的境界条件が成り立つ．

4. 重み付き鉛直分布関数を用いた非線形方程式の導出: 平面２次元形の非線形方程式系を磯部 (1994) と同様の手法によって導出する．速度ポテンシャル ϕ 及び密度比 $\lambda=\rho/\rho_0$ をそれぞれ N 個の鉛直分布関数の重み付きの和として次式のように表わす．

$$\phi(\boldsymbol{x},z,t)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\{Z_\alpha(z)\cdot f_\alpha(\boldsymbol{x},t)\}\equiv Z_\alpha f_\alpha,\quad \lambda(\boldsymbol{x},z,t)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\{\Lambda_\alpha(z)\cdot\ell_\alpha(\boldsymbol{x},t)\}\equiv\Lambda_\alpha\ell_\alpha>0 \tag{3}$$

式 (3) を式 (1) に代入して鉛直積分を行なった後，変分原理の Euler の方程式を求めると，非線形方程式系が式 (4)〜(6) のように得られる ($\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$)．

キーワード → 非線形方程式，内部波，密度流

連　絡　先 → 〒113-8656 文京区本郷 7-3-1，TEL: 03(5841)6114，FAX: 03(5841)8503

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_{\alpha\beta}\ell_\beta) + \nabla(A_{\alpha\beta\gamma}\nabla f_\beta \ell_\gamma) - B_{\alpha\beta\gamma} f_\beta \ell_\gamma = 0 \tag{4}$$

$$C_{\beta\alpha}\frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2}A_{\beta\gamma\alpha}\nabla f_\beta \nabla f_\gamma + \frac{1}{2}B_{\beta\gamma\alpha} f_\beta f_\gamma + gD_\alpha + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial \ell_\alpha}\int_b^\zeta \Pi(\ell_\alpha)\, dz = 0 \tag{5}$$

$$Z^\zeta_\beta \Lambda^\zeta_\gamma \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\ell_\gamma + \frac{1}{2}Z^\zeta_\beta Z^\zeta_\gamma \Lambda^\zeta_\delta \nabla f_\beta \nabla f_\gamma \ell_\delta + \frac{1}{2}\frac{\partial Z^\zeta_\beta}{\partial z}\frac{\partial Z^\zeta_\gamma}{\partial z}\Lambda^\zeta_\delta f_\beta f_\gamma \ell_\delta + g\zeta \Lambda^\zeta_\beta \ell_\beta + \frac{1}{\rho_0}\Pi^\zeta = 0 \tag{6}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \int_b^\zeta Z_\alpha Z_\beta \Lambda_\gamma\, dz, \quad B_{\alpha\beta\gamma} = \int_b^\zeta \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z}\Lambda_\gamma\, dz, \quad C_{\alpha\beta} = \int_b^\zeta Z_\alpha \Lambda_\beta\, dz, \quad D_\alpha = \int_b^\zeta \Lambda_\alpha z\, dz \tag{7}$$

ここで，$Z^\zeta_\alpha = Z_\alpha|_{z=\zeta}$, $\Lambda^\zeta_\alpha = \Lambda_\alpha|_{z=\zeta}$ 及び $\Pi^\zeta = \Pi|_{z=\zeta}$ であり，また，$\partial Z^\zeta_\alpha/\partial z = \partial Z_\alpha/\partial z|_{z=\zeta}$ である．

計算結果の精度・解像度は，用いる関数の関数形と項数に依存する．鉛直分布関数の項数を十分に多くとることにより，連続体の物理量の３次元的な変化を考慮する．

鉛直分布関数として $Z_\alpha = \Lambda_\alpha = z^\alpha$ を選択するならば，式 (4)〜(6) がそれぞれ式 (8)〜(10) のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q[\alpha+\beta]\ell_\beta) + \nabla(Q[\alpha+\beta+\gamma]\nabla f_\beta \ell_\gamma) - R[\alpha,\beta,\gamma] f_\beta \ell_\gamma = 0 \tag{8}$$

$$Q[\alpha+\beta]\frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2}Q[\alpha+\beta+\gamma]\nabla f_\beta \nabla f_\gamma + \frac{1}{2}R[\beta,\gamma,\alpha] f_\beta f_\gamma + gQ[\alpha+1] + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial \ell_\alpha}\int_b^\zeta \Pi\, dz = 0 \tag{9}$$

$$\zeta^{\beta+\gamma}\frac{\partial f_\beta}{\partial t}\ell_\gamma + \frac{1}{2}\zeta^{\beta+\gamma+\delta}\nabla f_\beta \nabla f_\gamma \ell_\delta + \frac{1}{2}S[\beta,\gamma,\delta] f_\beta f_\gamma \ell_\delta + g\zeta^{\beta+1}\ell_\beta + \frac{1}{\rho_0}\Pi^\zeta = 0 \tag{10}$$

$$Q[\alpha] = \frac{1}{\alpha+1}(\zeta^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}), \quad R[\alpha,\beta,\gamma] = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1}\,(\zeta^{\alpha+\beta+\gamma-1} - b^{\alpha+\beta+\gamma-1}) & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 \quad (\alpha\beta = 0) \end{cases},$$

$$S[\alpha,\beta,\gamma] = \begin{cases} \alpha\beta\, \zeta^{\alpha+\beta+\gamma-2} & (\alpha\beta \neq 0) \\ 0 \quad (\alpha\beta = 0) \end{cases} \tag{11}$$

5．双曲正接型の鉛直分布関数: 液体が気体に接する表面波や，密度躍層における内部波のように，密度の鉛直勾配が比較的大きな位置に発生する界面波をとらえるために，鉛直分布関数として次式のような双曲正接型の関数を用意しておく ($\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$).

$$\phi = \phi_0 + Z_\alpha f_\alpha, \quad \lambda = \lambda_0 + Z_\alpha \ell_\alpha, \quad Z_\alpha(z, \eta_\alpha(\boldsymbol{x}, t)) = \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left[c + \frac{2c}{d}(z - \eta_\alpha)\right]\right\} \tag{12}$$

ここで，$\phi_0 = \phi_0(\boldsymbol{x}, t)$, $f_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ であり，c, d は，ともに定数である．このとき，変分問題の汎関数は，$\mathcal{F} = \mathcal{F}[f_\alpha, \eta_\alpha, \zeta]$ となる．こうして，鉛直分布関数の項数を多くとることなく，界面付近における十分な精度を得る．例えば，混合しない２流体の場合，$\lambda_0 = 1$, $\ell_\alpha = (-1)^\alpha(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$ として $N \geq 3$ とすれば，右下図のように界面形が $\boldsymbol{x}$ に関する多価関数となる砕波の密度分布を表現できる．

6．結　論: 流体の密度が変化する波・流れ場解析のための鉛直積分型の完全非線形方程式系を導出した．混相流を対象としており，気体と液体の両者を同一のモデルで扱える．このような積分表示された方程式を用いることにより，数値計算法が比較的容易になる．すなわち，数値計算における経済性が上がると同時に，数値計算手法の困難さ，例えば，overshoot/undershoot を生ずることなく正確に圧力の Poisson 方程式を解かねばならないといった，を回避することができるという特長がある．

本研究を遂行するにあたり貴重な御助言を頂いた東京大学大学院工学系研究科渡辺　晃教授に感謝します．

参考文献: 磯部雅彦 (1994), 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1–14., Bateman, H. F. R. S. (1929), Proc. Roy. Soc. Lond., A, Vol. 125, pp. 598–618.,　Luke, J. C. (1967), J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395–397.

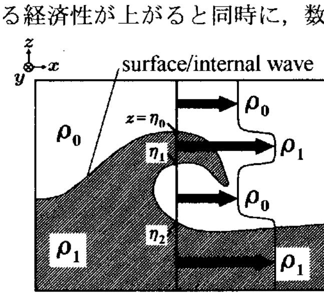

図: 砕波の密度分布