（Ｉ－71）ALE安定化有限要素法を用いた構造流体連成解析

中央大学　学生員　○高瀬慎介
日本技術開発株式会社　正会員　田中聖三
中央大学　正会員　樫山和男

1. はじめに

構造物に動的挙動を与える要因の一つに流体力がある．構造物の挙動と、流体の挙動とが連成する問題は工学の分野に数多く存在する．構造物から周期的に放出される渦（カルマン渦）の放出周波数と構造物の固有振動数が接近する状況では，構造物の振動の振幅が増大し，構造物の性能にも影響を及ぼす．そのため，構造物を設計する上で，流体力の影響を考慮することは必要不可欠であり，構造・流体連成解析は有効的な手法である．

そこで，本研究では，流れの支配方程式にArbitary Lagrangian-Eulerian法[1)2)3)]（以下ALE法と略記する）を適用し，構造・流体連成解析を行うものである．数値解析例として，バネ支持された剛体と流体の連成問題の解析として，円柱の渦振動問題（ロックイン現象）の解析を行う．また，その解析値と実験値[4)]との比較を行い本手法の有効性について検討する．

2. 基礎方程式

(1) 流体に関する基礎方程式

ALE法によって記述された非圧縮性粘性流れの運動方程式と連続の式はそれぞれ式(1),(2)で表される．
運動方程式；

$$\rho\left(\dot{u}_i + (\bar{u}_j)u_{i,j} - f_i\right) - \sigma_{ij,j} = 0, \tag{1}$$

連続式；

$$u_{i,j} = 0, \tag{2}$$

ここで，u_iは流速，$\hat{u}_i$は相対流速，pは圧力，ρは密度，f_iは物体力を表している．また，応力テンソルσ_{ij}は以下の式で表される．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{3}$$

ここで，μは粘性係数である．

(2) 構造に関する基礎方程式

構造は，流れの中でバネ支持された2次元剛体と仮定する．その運動方程式は次式で表される．

$$m\ddot{v}_i + c\dot{v}_i + kv_i = X_i, \tag{4}$$

ここで，$\ddot{v}_i$は加速度のベクトル，$\dot{v}_i$は速度のベクトル，X_iは物体の重心に働く集中力のベクトルである．

3. 流体の基礎方程式における安定化有限要素法

基礎方程式(1),(2)に対して，空間方向の離散化に$P1/P1$要素を用いた安定化有限要素法(SUPG/PSPG法)[5)]を適用することで以下の有限要素方程式を得る．

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta)\dot{u}_i + (\mathbf{K}(\bar{u}_j) + \mathbf{K}_\delta(\bar{u}_j))\,u_i$$
$$-(\mathbf{C} - \mathbf{C}_\delta)\frac{1}{\rho}\,p + \nu\mathbf{S}u_i = (\mathbf{N} + \mathbf{N}_\delta)\,f_i \tag{5}$$

$$\mathbf{C}^T u_i + \mathbf{M}_\varepsilon\dot{u}_i + \mathbf{K}_\varepsilon(\bar{u}_j)u_i - \mathbf{N}_\varepsilon + \mathbf{C}_\varepsilon\frac{1}{\rho}p = 0 \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{M,K,C,S,N}$は，係数行列であり，添字δ, εは，それぞれSUPG項，PSPG項に起因するものを表す．

Key Word: 構造流体連成解析,ALE法,安定化有限要素法
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

4. 構造と流体の連成方程式

流体における有限要素方程式(5)，(6)は以下のように書き換えることができる．

$$\mathbf{M}\dot{u}_i + \mathbf{K}u_i - \mathbf{G}p = f_i \tag{7}$$

$$\mathbf{G}^T u_i = 0 \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{M}$は質量行列，$\mathbf{K}$は移流項と粘性項の行列，$\mathbf{G}$は勾配行列，f_iは外力および境界積分の項である．物体表面の変数を物体の重心で定義した変数は，以下の関係を満足する必要がある．

$$\text{適合条件：}\quad \dot{u}_i^\gamma = T^T\ddot{v},\quad u_i^\gamma = T^T\dot{v}\quad on\quad \Gamma_I \tag{9}$$

$$\text{釣り合い条件：}\quad X + Tf_i^\gamma = 0\quad on\quad \Gamma_I \tag{10}$$

ここで，Tは物体の重心と物体表面の各節点の間の幾何学的な関係を表す行列である．有限要素方程式(7)，(8)に関して，移動境界Γ_I（物体表面）上の成分とそれ以外の成分とに分離し（添え字γは移動境界Γ_I上の変数を表し，添え字αはそれ以外の変数を表す），式(9)の適合条件を代入すると，有限要素方程式は，以下のようになる．
運動方程式：

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\gamma} \\ M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_i^\alpha \\ T^T\ddot{v}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{\alpha\alpha} & K^{\alpha\gamma} \\ K^{\gamma\alpha} & K^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ T^T\dot{v}_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G^\alpha \\ G^\gamma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^\alpha \\ f_i^\gamma \end{Bmatrix} \tag{11}$$

連続式：

$$\begin{bmatrix} G^{\alpha T} & G^{\gamma T} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i^\alpha \\ T^T v_i \end{Bmatrix} = 0 \tag{12}$$

式(12)の第2行より物体表面の節点力f^γを求め，釣り合条件式(10)を課して物体の運動方程式に代入すると次のようになる．

$$m^*\ddot{v}_i + c^*\dot{v}_i + kv_i = -T\left(M^{\gamma\alpha}\dot{u}^\alpha + K^{\gamma\alpha}u^\alpha - G^\gamma p\right) \tag{13}$$

ここで，

$$m^* = m + TM^{\gamma\gamma}T^T,\quad c^* = c + TK^{\gamma\gamma}T^T$$

である．これは，物体の質量mと減衰cにその周囲の流体との連成による付加的な質量，減衰の効果がそれぞれ加わったことを意味している．式(11)の第1行は，物体表面節点以外の節点に関する流体の運動方程式であり，次のように書き改められる．

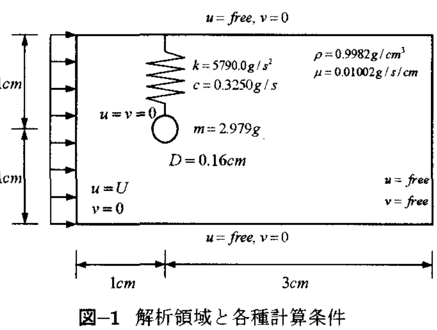
$$
\begin{aligned}
&M^{\alpha\alpha}\dot{u}_i + K^{\alpha\alpha}u_i - G^{\alpha}p = \\
&\qquad f_i^{\alpha} - M^{\alpha\gamma}T^T\ddot{v}_i - K^{\alpha\gamma}T^T\dot{v}_i
\end{aligned} \tag{14}
$$

また，式(12)の連続式は，次のように書き改められる．

$$
G^{\alpha T}u_i^{\alpha} + G^{\gamma T}T^T v_i = 0 \tag{15}
$$

5. 数値解析例

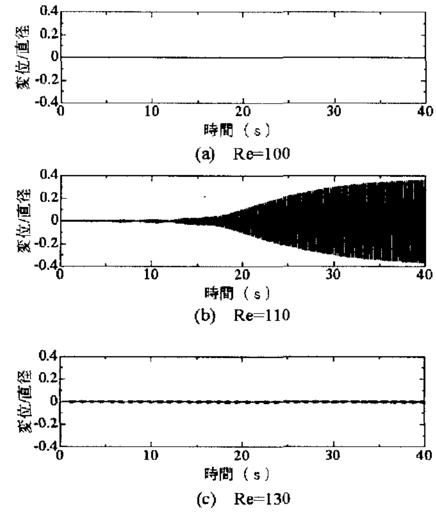
数値解析例として，バネ支持された剛体と流体の連成問題の解析として，円柱の渦振動問題（ロックイン現象）の解析を行う．解析モデルは，Anagnostopoulos and Bearman[4]がレイノルズ数90〜150の範囲を対象とした水槽実験を行い，レイノルズ数110付近の流れでロックインを捕らえることに成功したものを用いる．**図–1**に解析領域と各種計算条件を示す．円柱は剛体として，バネ支持された1自由度のバネ・マス系としている．解析は，$Re=90$，95，100，105，110，115，120，125，130の9ケースのレイノルズ数を用いて行った．レイノルズ数は上流流速を変えることにより変化させている．**図–2**に$Re=100$，110，130で計算を行った円柱の変位を示す．$Re=110$のときに，ロックイン現象により，円柱が大きく変位している様子がわかる．また，この変位を用いて求めた渦放出周波数より，実験値との比較を**図–3**に示す．$Re=110$，115，120でロックイン現象が見られた．また，実験値ともよい一致を示し，本手法の有効性が確認できた．



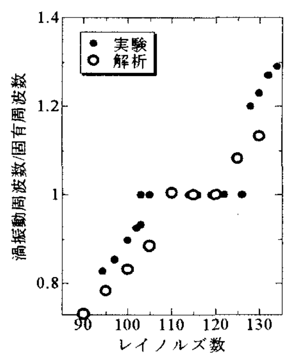
図–1 解析領域と各種計算条件

6. おわりに

本報告では，流れの支配方程式にALE法を適用し，構造・流体連成解析を行った．数値解析例として，バネ支持された剛体と流体の連成問題の解析を取り上げ，円柱の渦振動問題の解析を行い，実験値との比較を行った．本手法による計算結果は，ロックイン現象を捕らえることができ実験値ともよい一致を示し，本手法の有効性を示すことができた．



図–2 円柱の変位の時刻歴



図–3 円柱の振動振幅と渦放出周波数の変化（実験と解析の比較）

今後の課題として，格子依存性等について検討するとともに自由表面流れの中の構造物への構造・流体連成モデルの適用を行う予定である．

参考文献

1) 野村卓史，飯島政義：ALE法に基づく粘性流体と構造と相関問題の有限要素法手法：土木学会論文集：第416号：pp285-294：1990年
2) 野村卓史：ALE有限要素法による流れ・構造連成解析への予測子・修正子法の適用と計算過程に関する技法：土木学会論文集：第455号：pp55-63：1992年
3) 松本純一，川原睦人：MINI要素を用いた流体ー構造連成問題における安定形状同定：応用力学論文集：Vol.3：pp263-274：2000年
4) P.Anagnostopoulos, P.W.Bearman : 'Response characteristics of vortex-excited cylinder at low Renolds numbers' :*J.Fluid and Struct.*:6 (1992) :PP39-50
5) T.E.Tezduyar,S.Mittal,S.E.Ray and R.Shih :'Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements' :*Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* :**95** :pp221-242 :1992