(Ⅰ−15) ミクロ問題に骨組要素を用いた非線形マルチスケール解析

宇都宮大学 ○学生員 大植 健　宇都宮大学 正 員 斉木 功
宇都宮大学 正 員 中島 章典　東北大学 正 員 寺田 賢二郎

1. はじめに

非均質材料の材料非線形性はそれらの非均質性を定義するミクロスケールでの挙動に起因する．その典型的な材料としてセル構造体が挙げられる．セル構造体が圧縮を受ける場合，セルを構成する部材の座屈により，材料不安定が生じることが知られている[1]．そこで，著者らは，このような材料不安定現象に対し非線形マルチスケール解析の適用を試みてきた[2]．

一般的なマルチスケール法においてはマクロ構造が連続体であれば，ミクロ構造も連続体として定式化される．しかし，セル構造体はそのミクロ構造が薄肉部材からなるため，ミクロ解析においては構造要素による離散化が合理的であると考えられる．そこで，本報告ではミクロ解析に骨組要素を用いた非線形マルチスケール解析を構築し，その有効性を示す．

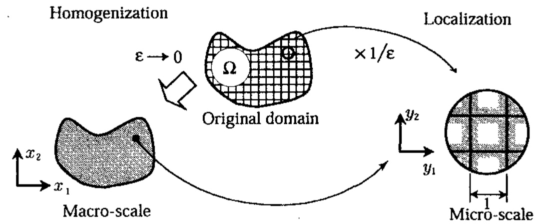
2. ミクロ解析への骨組要素の導入

(1) 線形均質化法の定式化

図–1 に示すような大きさ ϵ の単位周期構造 (ユニットセル) によって周期的に埋め尽くされた領域 Ω を解析対象とする．このとき，解析対象全体の尺度としてマクロスケール $\boldsymbol{x}$ を設定すると，解析対象を構成しているユニットセル内の尺度であるミクロスケール $\boldsymbol{y}$ はパラメーター ϵ を用いて $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\epsilon$ と表せる．このとき，ユニットセルの大きさの影響を受ける変数には上付の ϵ と付すと，この領域における一般的な微小変位弾性体の境界値問題は

$$\begin{aligned} &\nabla_x \left\{ \boldsymbol{C}^\epsilon : \nabla_x \boldsymbol{u}^\epsilon \right\} + \rho^\epsilon \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega \\ &\boldsymbol{u}^\epsilon = \underline{\boldsymbol{u}} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \underline{\boldsymbol{t}} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

と表せる．ここに，∇ は下付の変数での勾配をとる偏微分演算子，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力，ρ は密度，$\boldsymbol{f}$ は物体力，$\boldsymbol{u}$ は変位，$\boldsymbol{n}$ は境界における単位外向法線ベクトルである．ここで，仮想変位を $\boldsymbol{\eta}^0 + \epsilon \boldsymbol{\eta}^1$ として，式 (1) を弱形式に変換し，two-scale 収束論を適用する．上付の数字が 1 の場合はミクロスケール，0 の場合はマクロスケールに属することを示す．この弱形式の two-scale 極限より，境界値問題はマクロ，ミクロ両スケールに関して分割される．ミクロおよびマクロスケールにおける境界値問題はそれぞれ



図–1 マルチスケール法の概念図

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{C} : \left\{ \nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1 \right\} \mathrm{d}Y = 0 \tag{2}$$

$$\int_\Omega \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \,\mathrm{d}v = \int_\Omega \langle \rho \rangle \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 \,\mathrm{d}v + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 \,\mathrm{d}s \tag{3}$$

となる．$\langle \bullet \rangle$ は $\langle \bullet \rangle := \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \bullet \,\mathrm{d}Y$ なるユニットセル内での平均化を表す．また，式 (2) をミクロ問題，式 (3) をマクロ問題と呼ぶ．ここで問題が線形弾性体である場合，ミクロ問題はミクロ変位 $\boldsymbol{u}^1$ とマクロ変形 $\nabla_x \boldsymbol{u}^0$ が比例関係にあることを用いて，

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{C} : \left\{ (\boldsymbol{1} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}) \cdot \nabla_x \boldsymbol{u}^0 \right\} \mathrm{d}Y = 0 \tag{4}$$

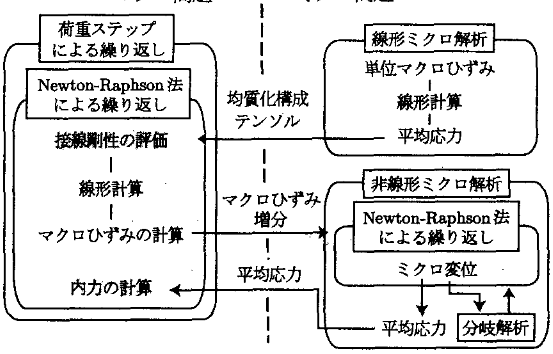
と表される．ここに $\boldsymbol{\chi}$ はミクロ変位 $\boldsymbol{u}^1$ をマクロ変形 $\nabla_x \boldsymbol{u}^0$ を $\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{\chi} : \nabla_x \boldsymbol{u}^0$ により対応付ける 3 階のテンソルであり，特性変位関数と呼ぶ．一般的な均質化法においては，ミクロ問題として式 (4) を解き，特性変位関数 $\boldsymbol{\chi}$ を求める．

(2) 骨組要素の導入

式 (2) に示したミクロ問題に対し骨組要素を導入する．通常のマルチスケール法の解析アルゴリズムに従い，ミクロ解析の自由度をミクロ変位 $\boldsymbol{u}^1$ および特性変位関数 $\boldsymbol{\chi}$ とした場合，マクロ変位 $\boldsymbol{u}^0$ との変位場の不整合から問題が生じることが指摘されている[3]．そこで，本研究ではこの問題点に対しミクロ解析の自由度にミクロ構造の実変位を用いることにより解決を行った．ミクロ構造の実変位はマクロひずみによる一様変位とミクロ変位と和で表され，

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left\{ \nabla_x \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{5}$$

Key Words: セル構造体，骨組構造，非線形マルチスケール解析，分岐
〒 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2　宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6208 Fax.028-689-6230



図–2 非線形マルチスケールアルゴリズム

となる．ミクロ構造の実変位を自由度としたミクロ問題は

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{C} : \nabla_y \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}Y = 0 \tag{6}$$

となる．また，この式の単位マクロひずみに対する解から得られるユニットセル内での平均応力がマクロ問題の平均物性となる．その平均応力の算出には，

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}s \tag{7}$$

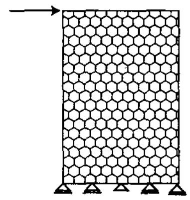
を用いた．ここに，$\boldsymbol{t}$ は表面力であり，$\boldsymbol{y}$ はミクロスケールにおける位置ベクトルである．骨組のような剛な変位場を持つモデルにおいては，局所的な応力が定義できないため上式を用いなくてはならない．

3. 非線形解析

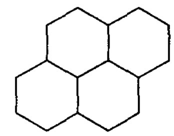
前節で定式化を行った骨組でモデル化したミクロ問題を非線形問題に拡張し，非線形マルチスケール解析を行う．非線形マルチスケール解析の定式化は紙面の都合上，文献[2]に譲ることとする．ここでは，ミクロ問題とマクロ問題の双方に対して幾何学的非線形性を考慮し，ミクロ問題に関しては必要に応じて分岐解析を行う．また，骨組でモデル化を行っているミクロ問題は有限回転・微小ひずみとし，剛体変位除去の手法を用いた．

(1) 非線形解析アルゴリズム

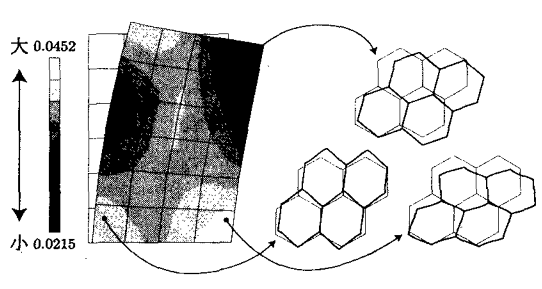
均質化理論から得られたマクロ問題の構成関係はミクロ問題により与えられ，また，ミクロ問題ではマクロ変形が荷重のような役割をする．このような，マクロ，ミクロ問題が連成する解析を非線形問題に拡張するには，マクロスケールの物性評価点ごとに独立したミクロ問題を解くことになる．この非線形解析手順を**図–2** にまとめる．マクロ問題においては各物性評価点で接線剛性と応力の 2 つの評価を行う．よって，マルチスケール解析では接線剛性評価のために線形化ミクロ解析と応力評価のための非線形ミクロ解析が必要となる．



図–3 解析対象



図–4 ユニットセル



図–5 変形図と局所化

(2) 解析例

解析対象は正六角形セルからなるセル構造体を用いた．マクロ構造であるセル構造体は，**図–3** に示した幅と高さの比が 2 ： 3 であるディープビームとし，物性評価点は一要素あたり 4 点とした．境界条件は，ディープビームの下辺の中心を完全固定し，その他の下辺の点は鉛直方向にのみ固定とした．また，左上の点を水平右方向に強制変位を与えることで曲げ変形を与えた．さらに，不安定問題を扱う際のユニットセル選定に関して，文献[2]により分岐を制限しない複数の単位周期構造を用いなければならないことが指摘されている．よって，ここではミクロ解析で対象とするユニットセルを**図–4** に示す 2×2 のセルとした．

全体構造の変形を**図–5** に示す．図中の等高線は Green ひずみの第二不変量の分布を示す．また，同図右には，局所化から得られた各点のユニットセルの変形図を示す．ひずみの小さい右上の点のセルは剛体回転している．また，ひずみの大きい左右下のセルは大きく変形しており，右下のセルに関しては座屈が生じている．

参考文献

1) L. J. Gibson and M. F. Ashby: *Cellular solids*, CAMBRIDGE, 1997.
2) 斉木　功，寺田賢二郎，堀　宗朗，池田清宏，巨視的材料不安定性のマルチスケールモデリングにおける微視的構造周期のブロック対角化法による同定，応用力学論文集, Vol.3, pp.37–45, 2000.
3) 大植健，斉木功，中島章典，寺田賢二郎：骨組要素を用いたセル構造体のマルチスケールモデリング，応用力学論文集, Vol.3, pp.185-192, 2000.