（Ⅰ－13）　板要素の性能評価に関する一考察

足利工業大学大学院　学生員○大須賀　淳
足利工業大学　正会員　末武　義崇
足利工業大学大学院　学生員　石山竜太郎

1. はじめに

有限要素法は、既に工学の分野で代表的な数値解析手法として幅広く利用されている。しかしながら、解析結果に対する要素タイプや要素分割数の影響は大きく、商用化された汎用コードを用いた解析であっても、適切な要素タイプ・分割数を選択しなければ、妥当な近似解が得られない恐れがある。本研究では、特に板要素の解析精度に着目し、Reissner - Mindlin 厚板理論に基づく Fourier 級数解を基準解とした時の、薄板要素あるいは厚板要素を用いた有限要素解析の精度を定量的に評価した。

2. 解析理論

厚板の曲げ解析については、断面の直線性は保持されるものの、法線性は必ずしも保持されないという Reissner - Mindlin の仮定に基づき、たわみ $w(x,y)$、回転角 ψ_x および ψ_y に関する次の基礎微分方程式が導かれる。

$$\begin{cases} D\left(\dfrac{\partial\psi_x}{\partial x^2}+\dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+\kappa Gh\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)=0 \\ D\left(\dfrac{\partial\psi_y}{\partial y^2}+\dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+\dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right)+\kappa Gh\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)=0 \quad ;G=\dfrac{E}{2(1-\nu)} \\ \kappa Gh\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\dfrac{\partial\psi_x}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+p(x,y)=0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで $p(x,y)$ は荷重、E は Young 率、D は板の曲げ剛性、h は板厚、ν は Poisson 比、G はせん断弾性係数、κ は横せん断ひずみの分布に関する補正係数である。

Fourier 級数を用いて式(1)を解くことを考える。周辺単純支持の境界条件を想定し、たわみ w および回転角 x,y を次式で表すことにする。

$$w=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}W_{jk}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\psi_x=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{jk}\cos\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\psi_y=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_{jk}\sin\frac{j\pi x}{a}\cos\frac{k\pi y}{b} \tag{2}$$

式(2)を式(1)に代入し、荷重関数 $p(x,y)$ を Fourier 二重級数展開すれば、式(2)の未定係数 W_{jk} の表示として次式が得られる。

$$W_{jk}=\frac{P_{jk}}{D\left\{(j\pi/a)^2+(k\pi/b)^2\right\}^2}\left[1+\frac{h^2}{6(1-\nu)\kappa}\left\{\left(\frac{j\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2\right\}\right] \tag{3}$$

ここに、P_{jk} は荷重関数 $p(x,y)$ の Fourier 係数である。

3. 解析モデル

本研究では、図１のような周辺単純支持矩形平板を取り上げ、荷重については等分布荷重（分布）および中央点 O に作用する集中荷重（集中）の２つのパターンを考えた。解析モデルの寸法は、縦横比 $a/b=1.0$ で一定とし、幅厚比を $h/a=0.01\sim0.5$ の範囲で変化させた。板の材料定数は、Young 率 $E=2.068\times10^5[MPa]$、

キーワード：有限要素法，板要素，薄板理論，厚板理論，Fourier 級数
〒326-8558　栃木県足利市大前町 268-1　足利工業大学　TEL0284-62-0605　FAX0284-64-1061

Poisson 比$\nu = 0.3$、および補正係数については$\kappa = 5/6$とした。有限要素法解析にあたっては汎用コード MARC を使用し、要素タイプには 4 辺形厚肉線形シェル要素（Type1）および 8 節点厚肉線形シェル要素（Type2）の 2 種類を用いた。また、解析モデルは対称性を考慮し、モデルの$1/4$領域とし、要素分割数は$N = 2 \sim 1600$の範囲とした。解析結果については板の中央点Oにおけるたわみの誤差を用いて整理した。誤差εの計算に際しては、Fourier 級数解w_Fを基準とし、次式を用いて算出した。

$$\varepsilon = \left| w / w_F - 1 \right| \times 100 \quad (\%)$$

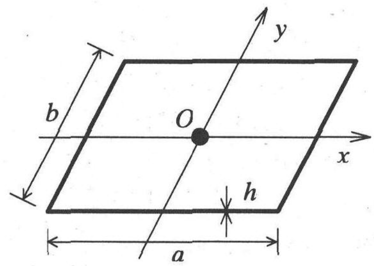

図 1. 周辺単純支持矩形平板

4. 解析結果および考察

解析結果を図 2、図 3 および図 4 に示す。図 2 および図 3 は、有限要素解析における分割数Nの変化に伴うたわみの精度変化を示したものである。図 2 は、薄板を想定し、幅厚比を$h/a = 0.01$とした場合、図 3 は厚板を想定し、幅厚比を$h/a = 0.5$とした場合の結果である。図 2 から明らかなように、薄板解析ではどのモデルでも良好な解析結果が得られており、分割数Nが増加するほど解析精度が改善されることがわかる。特に、分割数Nが100を超えると、いずれのモデルも誤差εが0.2%以内に収まっており、解析精度は極めて良好なことが分かる。一方、分割数が$N \leqq 100$の範囲では、Type2 の 8 節点要素については高い精度の解析結果が得られているものの、Type1 の 4 辺形要素については、分割数の減少に伴い解析結果が急激に低下する様子が認められる。

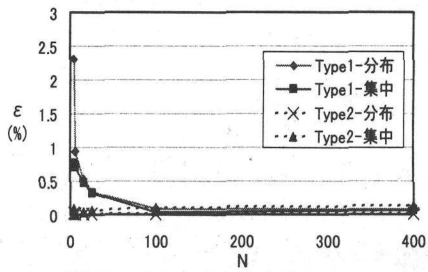

図 2. 分割数の変化に伴う精度変化 ($h/a = 0.01$)

図 3 を見ると、厚板解析の場合は薄板と異なり、全体としてあまり良好な結果が得られなかった。特に、両要素タイプとも、集中荷重の場合は分割数の増大に伴って誤差が増大する傾向を示している。一方、分布荷重の場合は、分割数によらず概ね10%程度の誤差が生じており、分割数の増加がこれ以上の精度の向上につながらない傾向を示している。

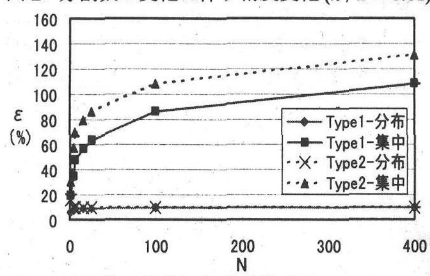

図 3. 分割数の変化に伴う精度変化 ($h/a = 0.5$)

なお分割数が400を超える範囲では、誤差の傾向に変化がみられないため、図 2 および図 3 においては解析結果を省略して図示した。

図 4 は、幅厚比h/aの変化に伴う誤差の変化を示したものである。実用的な有限要素法解析を念頭におき、分割数としては比較的粗い$N = 25$を選択した。図より、幅厚比h/aが増大と共に誤差εが増大することが確認できる。また、集中荷重のモデルに著しい精度低下が認められる。

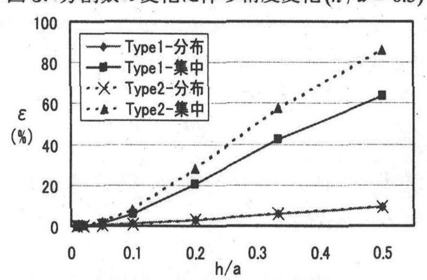

図 4. 幅厚比の変化に伴う精度変化 ($N = 25$)

5. まとめ

本研究の解析結果より、以下の結論が得られた。薄板の場合、十分な精度を確保する良好な結果が得られた。しかしながら、厚板の場合には、必ずしも十分な精度を確保することはできず、特に、集中荷重を作用させたモデルでは、要素タイプによらず著しい精度低下が見られた。

参考文献

1）山田貴博：四面体要素の性能評価，計算工学講演会論文集 Vol.5，pp.435-436，2000.

2）鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブック I 基礎編，培風館，pp.256-290，1981.