(I -12)　　任意節点配置を考慮したEFGM平面応力問題

足利工業大学大学院　学生会員○内田伸一郎
足利工業大学　正 会 員　末武　義崇
足利工業大学大学院　学生会員　石山竜太郎

1. はじめに

近年、新しい数値解析手法として要素分割を必要としないエレメントフリー法（EFGM）が考案されている。筆者らはLagrangeの多項式を変位関数として用いることで、簡明かつ直接的なEFGMを構築するとともに、梁や薄板の有限変位解析に適用しその妥当性や有用性を示してきた。

本研究では、従来のEFGMの節点配置が格子状に限定されてしまう問題点を改善するために、複素変数を有するLagrange多項式を定義し、任意節点配置に対応し得るようなEFGMの再定式化[1]を行った。また、再定式化した複素Lagrange多項式に基づくEFGMを用いて、二次元離散データのEFGM的補間（EF補間）を試みた。さらに、平面応力問題への適用における問題点について検討を行った。

2. 複素Lagrange多項式に基づくEFGMの定式化

格子状の節点配置を想定した従来のEFGMに対し、複素変数$z=x+iy$を有するLagrange多項式を定義することで、任意の節点配置に対応したEFGMを定式化することができる。複素平面においてN+1個の節点の$\{z_j=x_j+iy_j\}(j=0\sim N)$を考える。このとき、複素Lagrange基底を次式で定義する。

$$\varphi_j(z)=\prod_{m=0}^{N} Z_{m,j}(z);\ Z_{m,j}(z)\begin{cases}1 & (j=m)\\ (z-z_m)/(z_j-z_m) & (j\neq m)\end{cases} \tag{1}$$

式(1)は、Lagrange基底の基本的な性質である$\varphi_j(z_k)=\bar{\varphi}_j(\bar{z}_k)=\delta_{jk}$となる性質を満たす。今、評価点$(x,y)$を中心とした矩形のサポート領域を設定し、節点値$f_j\ (j=0\sim N)$が全て実数であるとすれば、評価点の値$F(x,y)$は次の複素Lagrange多項式で表現することができる。

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N} f_j\left\{\varphi_j(z)+\bar{\varphi}_j(\bar{z})\right\}=\sum_{j=0}^{N} f_j\,\mathrm{Re}\left[\varphi_j(z)\right] \tag{2}$$

ここでLagrange基底$\varphi_j(z)$の性質から、式(2)は一致条件$f(x_j,y_j)=f_j\ (j=0\sim N)$を満たす。また式(3)を用いて計算した、評価点$(x,y)$の値およびその偏導関数の離散表示は次式のようになる。

$$F(x,y)=\mathbf{B}_0^T(x,y)\mathbf{f}\ ,\qquad \partial F/\partial x=\mathbf{B}_1^T(x,y)\mathbf{f}\ ,\qquad \partial F/\partial y=\mathbf{B}_2^T(x,y)\mathbf{f} \tag{3}$$

ここに$\mathbf{B}_0$、$\mathbf{B}_1$および$\mathbf{B}_2$はLagrange基底およびその微分からなる係数ベクトル、$\mathbf{f}$は節点値ベクトルであり、以下の通りに与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}_0^T&=\lfloor \mathrm{Re}[\varphi_0(z)]\ \ \mathrm{Re}[\varphi_1(z)]\ \cdots\ \mathrm{Re}[\varphi_N(z)]\rfloor\\ \mathbf{B}_1^T&=\lfloor \mathrm{Re}[\varphi_0'(z)]\ \ \mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]\ \cdots\ \mathrm{Re}[\varphi_N'(z)]\rfloor\\ \mathbf{B}_2^T&=-\lfloor \mathrm{Im}[\varphi_0'(z)]\ \ \mathrm{Im}[\varphi_1'(z)]\ \cdots\ \mathrm{Im}[\varphi_N'(z)]\rfloor\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. 補間モデル

本研究では、離散データを任意節点配置の二次元領域に与え、複素Lagrange多項式に基づくEF補間を行った。任意の節点配置の一例として、図1に示す格子の一部が密になった節点配置を取り上げる。総節点数を761、サポートパラメータを0.4としてEF補間を実施した。

キーワード：EFGM，複素Lagrange多項式，任意節点配置，平面応力問題
〒326-8558　栃木県足利市大前町268-1　足利工業大学大学院　TEL:0284-62-0605　FAX:0284-64-1061

また、二次元領域に与えた離散データは、2 方向余弦半波の形状を示す次式で生成するものとした。

$$g(x,y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \tag{5}$$

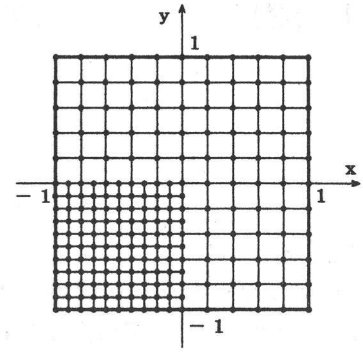

図 1　部分的に密な格子節点配置

4. 補間結果および考察

結果として得られた補間形状を、図 2 に示す。図から明らかなように、式(5)が表わす 2 方向余弦半波の形状と同等の、極めて良好な補間形状が得られている。

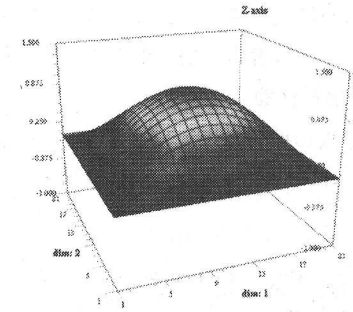

図 2　補間結果

一方、EF 補間の場合、用いた変位関数を微分することで、与えた離散データに対応する関数の導関数をも近似することができる。例えば、筆者らが考案した実 Lagrange 多項式に基づく従来の EFGM[2]に従った EF 補間を行った場合、補間結果を x 方向に偏微分して得られる近似導関数の形状を図示すると、図 3 のような結果が得られる。式(5)を参照すれば、図 3 に示した近似導関数の形状は概ね妥当な形となっている。

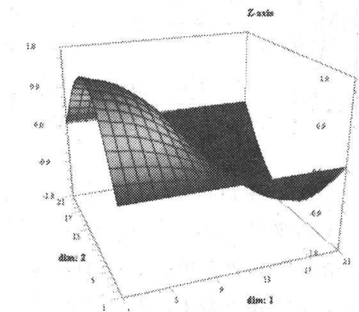

図 3　x 方向偏導関数
(実 Lagrange 多項式)

これに対し、今回の複素 Lagrange 多項式に基づく EF 補間を行った場合、式(3)の第 2 式を用いて計算される偏導関数の形状は、図 4 に示すとおりである。この結果、式(2)を一階微分するだけで精度が著しく低下している様子が認められる。

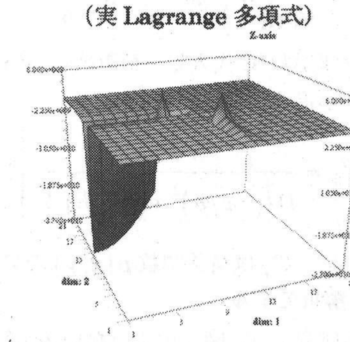

図 4　x 方向偏導関数
(複素 Lagrange 多項式)

5. 離散化汎関数の問題点

平面応力問題に対応する汎関数として、微小変位理論に基づく仮想仕事の原理を次式に示す。

$$\iint_S \left[\left\{ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right\} \right.$$
$$\left. + \left\{ G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) \right\} \right] dS$$
$$- \iint_S \left(\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v \right) dS - \int_{C_\sigma} \left(\bar{X}_\nu \delta u + \bar{Y}_\nu \delta v \right) dC = 0 \tag{6}$$

前節で述べたように、式(3)の第 2 式を用いた偏導関数の近似が不可能であったことを考慮すれば、式(6)のように多数の偏微分項から成る仮想仕事の原理を、式(3)の第 2 式および第 3 式によって離散化することは、著しく精度を悪化させる原因になる。

従って、変位関数としての式(2)の見直しや、混合型の変分原理を用いることで変位と応力を共に未知量とし、できるだけ微分された項を含まない汎関数を離散化するなど、別個の対策が必要となる。

参考文献

1) Yoshitaka Suetake and Shinichiro Uchida : TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS BY USING ELEMENT-FREE METHOD BASED ONLAGRANGE POLYNOMIAL,JSSB-JK6,2001-8.

2) 末武義崇：Lagrange 多項式を用いた薄板のエレメントフリー解析，土木学会第 54 回年次学術講演会，1999.