（Ⅰ－7）　　　超関数による荷重の表示

日本建設情報総合センター　　正会員　小林　保

1．はじめに

撓みを計算する方法の１つに式(1)で表される撓み曲線の微分方程式を用いる方法がある。

$$\frac{1}{EI}\frac{d^4\eta(x)}{dx^4}=-w(x)\quad\cdots(1)$$

ここで、xは材軸線に沿う座標

　　$\eta(x)$は座標xにおける撓み

　　$w(x)$は座標xに作用している分布力

　　EIは梁の曲げ剛度

構造力学において用いられる荷重$f(x)$は、図-1に示すように、単位N/mの分布力$w(x)$と単位Nの集中力$p(x)$と単位Nmの集中モーメント$\mu(x)$から成る。

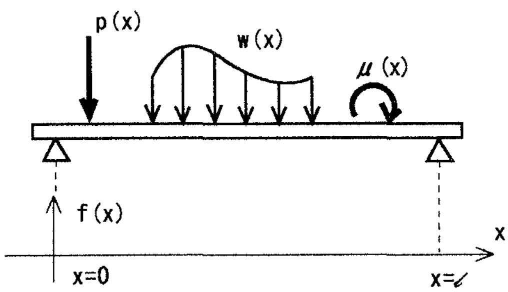

図-1　荷重の分布

撓み曲線の微分方程式(1)は、荷重が分布力$w(x)$の場合だけしか適用できない。

ディラック関数$\delta(x)$を用いて集中力を表示すると、荷重が集中力$p(x)$の場合にも撓み曲線の微分方程式が適用できる[1]。ディラック関数の特異点が集中力の作用点を表示する。ディラック関数は超関数の１つであるが、超関数についてのSchwarzの理論も佐藤の理論も、特異点については「関数値は存在しない」[2]と説明するだけである。超関数を構造力学に適用するためには、集中力の作用点を表示する特異点について詳しく考察する必要がある。

2．荷重の表現と関数擬値

３種類を統合した荷重$f(x)$を考えるために、代表単位をN/mとし、荷重$f(x)$の単位をN/mとすれば、

$$f(x)\,\mathrm{N/m}=w(x)\,\mathrm{N/m}+p(x)\,\mathrm{N}+\mu(x)\,\mathrm{Nm}\quad\cdots(2)$$

代表単位N/mで両辺を割ると、

$$f(x)=w(x)+p(x)\mathrm{m}+\mu(x)\mathrm{m}^2\quad\cdots(3)$$

「m」は座標xの単位であり、長さの単位である。荷重$f(x)$は超関数であり、式(3)の右辺の第２項と第３項は集中力と集中モーメントの作用点の状態を表示している。記号「m」は長さの単位の意味を失い、特異点の目印になっている。横軸xの単位という意味で「横軸単位」と呼び、記号「|θ」を用いることを提案する。単位「m」を記号「|θ」で置き換えると、

$$f(x)=w(x)+p(x)|\theta+\mu(x)|\theta^2\quad\cdots(4)$$

式(4)の表現を関数擬値と呼ぶことを提案する。

3．定積分の集中

関数擬値について数学的に考察するため、定積分の集中について考える。任意の積分可能関数$f(x)$は、任意の点x=aについて式(5)を満足する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}f(x)\,dx=0\quad\cdots(5)$$

$$\int_{a-0}^{a+0}f(x)\,dx=0\quad\cdots(6)$$

式(5)は式(6)と略記することができ、区間$a-0\leqq x\leqq a+0$における定積分である。区間$a-0\leqq x\leqq a+0$と点x=aを同一視するのは自然であるから、式(6)は点x=aにおける定積分と考えても良い。積分可能関数の点における定積分は必ず0になる。

ディラック関数$\delta(x)$の特異点x=0においては、式

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)\,dx=1\quad\cdots(7)$$

(7)が成り立つ。

キーワード：撓み曲線、微分方程式、ディラック関数、集中力の作用点、特異点
連絡先：東京都港区赤坂７の１０の２０　日本建設情報総合センター

式(7)は区間 $-0 \leqq x \leqq +0$における定積分が0でない値を持つことを意味しており、式(6)と反する。この性質がディラック関数$\delta(x)$の特異点の特徴である。
点における定積分が0でない値を持つので、定積分の集中と呼ぶことを提案する。

任意の関数f(x)について、式(8)のI_kを点x=aにおける第k次のモーメント定積分と呼ぶことを提案する。

$$I_k=\int_{a-0}^{a+0}(x-a)^k f(x)\,dx \quad \cdots(8)$$

式(7)は点x=0における第0次のモーメント定積分である。ディラック関数の導関数$\delta'(x)$の特異点x=0においては、式(9)が成り立ち、第1次のモーメント定積分の集中が生じる。

$$\int_{-0}^{+0} x\delta'(x)\,dx=-1 \quad \cdots(9)$$

4．関数擬値の定義

ディラック関数及びその導関数は、特異点においてモーメント定積分の集中が生じるので、その値を用いて特異点の関数擬値を定義する。

任意の関数f(x)が点x=aにおいて第k次のモーメント定積分の集中を生じるとき、その値I_kをf(a)とする。ただし、モーメント定積分の集中であることを表示しないと混乱する。関数f(x)が単位Tを持ち、変数xが単位θを持つとすれば、第k次のモーメント定積分は単位$T\theta^{k+1}$を持つ。単位を添えて、式(10)のように書けば、混乱を防げる。

$$f(a)\,T=I_k\,T\theta^{k+1} \qquad (10)$$

両辺をTで割れば、式(11)を得る。

$$f(a)=I_k\theta^{k+1} \qquad (11)$$

式(11)においては、θは単位の意味を失い、モーメント定積分の集中の目印になっている。
ディラック関数の特異点については

$$\delta(0)=\theta \qquad (12)$$

ディラック関数の導関数の特異点については

$$\delta'(0)=-\theta^2 \qquad (13)$$

5．特異点の内部構造

ディラック関数$\delta(x)$の特異点において定積分の集中が生ずるのは、特異点が内部構造を持つからであると考えることを提案する。式(14)の関数$\omega(x)$を用いて式(15)で表される関数$\pi(x)$の概形は、図-2のようになる。関数$\pi(x)$の部分である関数$\omega(x)$が区間$-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon$において、関数$\delta(x)$の特異点x=0の内部構造を表示する。

$$\omega(x)=\frac{(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)!}{2^{2\lambda+1}(\lambda!)^2\varepsilon^{2\lambda+1}}(x^2-\varepsilon^2)^{\lambda} \quad \cdots(14)$$

$$\pi(x)=\begin{cases}0 & (-\infty<x<-\varepsilon)\\ \omega(x) & (-\varepsilon\leqq x<+\varepsilon)\\ 0 & (+\varepsilon\leqq x<+\infty)\end{cases} \quad \cdots(15)$$

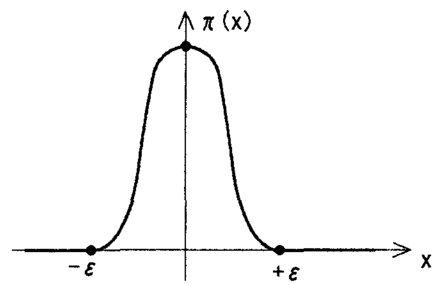

図-2　特異点の内部構造

関数$\pi(x)$は区間$-\infty<x<+\infty$の全域で$\lambda-1$回微分可能であり、$\lambda\to\infty$の極限を考えると無限回微分可能である。関数$\pi(x)$は、式(16)を満足するから、$\varepsilon\to+0$のとき$\pi(x)\to\delta(x)$となる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\pi(x)\,dx=1 \quad \cdots(16)$$

6．おわりに

単位の異なる3種類を統合した荷重を、超関数を用いて表示するために、超関数の特異点について考察した。超関数の性質の中で「モーメント定積分の集中」を用いて「関数擬値」を定義した。

（参考文献）
1) 田島一郎 他、「工科の数学3」、培風館、1968年3月、84頁、例題3.16の[b]
2) M.J.ライトヒル著、高見穎郎訳、「フーリエ解析と超関数」、1975年7月、33頁、[定義8]
今井功、「応用超関数論Ⅰ」、サイエンス社、1981年5月、15頁、[定義2]