（Ⅰ−3）　並列有限要素法を用いた*VOF*法による自由表面流れ解析

中央大学大学院　学生員　根本　深
中央大学　学生員　○羽田康則
日本工営株式会社　正会員　桜庭雅明
中央大学　正会員　樫山和男

1.　はじめに

自由表面流れの解析手法は，Lagrange的にメッシュを移動させて自由表面を直接的に表現する界面追跡手法と，Euler的に自由表面の位置を間接的に表現する界面捕捉手法に大別される．これらの手法のうち，VOF法[1]に代表される界面捕捉法は，複雑な自由表面形状を表現できる有効な手法である．しかし，界面捕捉法の計算精度はメッシュに大きく依存するため，界面追跡法に較べより多くのメッシュを必要とする．このため，大規模計算となり，計算時間及び計算機容量が増大するという問題を抱えている．

本研究は，この問題を改善するために，VOF法に並列有限要素法[2]を導入し，その効果の検討を行ったものである．なお，並列計算機としてはPCクラスター型並列計算機を使用して，数値解析手法として安定化有限要素法を適用した．数値解析例として，3次元ダムブレイク問題の解析を行い，既存の実験値との比較と，並列化効率について検討を行った．

2.　数値解析手法

VOF法は界面関数により自由表面を間接的に表して解析する方法である．図-1に本解析のフローチャートを示す．

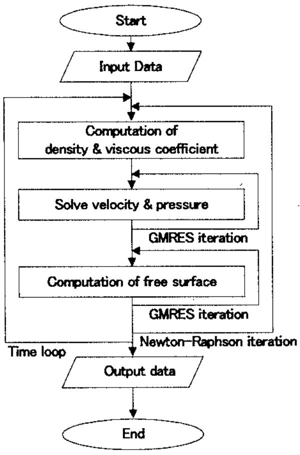

図-1 解析フローチャート

(1)　基礎方程式

非圧縮粘性流体の基礎方程式は式**(1)**，**(2)**に示すNavier-Stokesの運動方程式と，連続式である．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j u_{i,j}-f_i\right)-\sigma_{ij,j}=0 \qquad in\ \Omega \qquad (1)$$

$$u_{i,i}=0 \qquad in\ \Omega \qquad (2)$$

ここに，u_iは流速，f_iは物体力である．σ_{ij}は応力テンソルであり，以下の式で表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad (3)$$

ここに，p は圧力である．また，ρ，μはそれぞれ密度，粘性係数であり，式**(4)**，**(5)** により決定される．

$$\rho=\rho_l\phi+\rho_g\left(1-\phi\right) \qquad (4)$$

$$\mu=\mu_l\phi+\mu_g\left(1-\phi\right) \qquad (5)$$

ここに，ρ_l，μ_lは液体の密度と粘性係数，ρ_g，μ_gは気体の密度と粘性係数，ϕは界面関数である．界面関数は，VOF法において各節点が液体であるか気体であるかを表す指標である．界面関数ϕは0〜1の値をとり，初期条件として，液体領域においては$\phi=1$，気体領域においては$\phi=0$，自由表面上では$\phi=0.5$を与えている．

自由表面の計算については，基礎方程式として，式**(6)**に示す界面関数ϕに関する移流方程式を用いる．式**(6)**を，流れ場の計算から求めた流速u_iを用いて解く事により，自由表面の位置を決定する事ができる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u_i\phi_{,i}=0 \qquad in\ \Omega \qquad (6)$$

(2)　有限要素方程式

式**(1)**，**(2)**に安定化有限要素法（SUPG/PSPG法）を適用すると，最終的に以下の有限要素方程式が得られる．

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\mathbf{N}(u_j)+\mathbf{N}_\delta(u_j))u_i\\ +\mathbf{K}u_i-(\mathbf{G}+\mathbf{G}_\delta)p=\mathbf{F}+\mathbf{F}_\delta\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{G}^t+\mathbf{G}^t_\varepsilon\right)u_i+\mathbf{M}_\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial t}+\mathbf{N}_\varepsilon(u_j)u_i\\ +\mathbf{G}_\varepsilon p=\mathbf{F}_\varepsilon\end{aligned} \qquad (8)$$

ここに，**M**，**N**，**K**，**G**，は係数行列，**F**は外力ベクトルであり，添字δはSUPG項に起因するものを表し，添字εはPSPG項に起因するものを表している．時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用し，圧力及び連続式は陰的に取り扱った．

また，式**(6)**に安定化有限要素法（SUPG法）を適用すると，以下の有限要素方程式が得られる．

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\mathbf{N}(u_i)+\mathbf{N}_\delta(u_i))\phi=0 \qquad (9)$$

ここに，**M**，**N**は係数行列であり，添字δはSUPG項に起因するものを表している．時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用した．

非線形方程式である式(7)，(8)を精度良く解くための解法として，Newton-Raphson法に基づく反復計算を用いている．また，反復過程における線形方程式の解法には，大規模計算に有利なMatrix-Free法に基づくGMRES法[2]を使用している．

Key Word: VOF法，Newton-Raphson法，並列計算手法，PCクラスター
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

(3) 並列計算法

本研究では，分散メモリー型並列計算機を用いた領域分割法に基づく並列計算手法[2]を導入している．各プロセッサーは，割り当てられた部分領域のデータしか記憶しておらず，省メモリーに計算を行う事ができる．通信ライブラリーには機種依存性のないMPI (Message Passing Interface) を用いた．本手法では，連立1次方程式をMatrix-Free法に基づくGMRES法により解く過程で，部分領域のベクトルの内積計算を全体領域で完成させるために全プロセッサ間通信を，要素ごとのベクトルを全体系のベクトルに重ね合わせるために隣接プロセッサ間通信を用いている．なお，並列計算機は8台のPC(PentiumIII 866MHz) をEthernetで接続した，自作のPCクラスター型並列計算機を使用した．

3. 数値解析例

本手法の計算精度と並列化効率を検討するために，3次元ダムブレイク問題の計算を行った．**図-2**に示すような$2m \times 0.3m \times 1.0m$の解析領域に，鉛直に置かれた板によって静止している$0.45m \times 0.30m \times 0.90m$の水柱を考え，これを表-1に示す分割幅の異なる2種類のメッシュを用いて解析を行った．時間増分量は$\Delta t = 1.0\times10^{-3}$secとし，液体には水（密度998.0kg/m^3，粘性係数1.01$\times10^{-3}$Ns/m^2），気体には空気(密度1.205kg/m^3，粘性係数1.81$\times10^{-5}$Ns/m^2)を仮定している．境界はすべて固体壁としfree-slip条件を与えた．

図-3，**図-4**はそれぞれ，各時刻における自由表面形状と，水際線の時刻歴を実験結果[3)4)]と比較したものである．右壁に衝突するまでの過程ではmesh-Lとmesh-Sによる解析結果に差異はほとんど見られず，双方とも実験値と若干のずれは見られるものの，妥当な結果が得られているといえる．しかし，衝突後においては自由表面形状は大きな差異が見られメッシュによる依存性が確認された．

次に，本手法の並列化効率を検討するために，領域をスライス型に分割し，各領域の要素数が等しくなるようにして，並列計算を行った．並列計算におけるプロセッサー数は1，2，4，8台として，各台数における並列化効果の検討を行った．**図-5**は演算速度倍率と並列化効率を示している．mesh-Sでは計算時間に対し通信に要する時間の割合が高いため，並列化効率は低くなるが，mesh-Lでは妥当な並列化効率が得られており，大規模計算における本並列計算手法の有効性が示された．

表-1 要素分割

	mesh-L	mesh-S
total number of nodes	43173	6027
total number of elements	230400	28800
$\Delta x = \Delta y = \Delta z$	2.5[cm]	5.0[cm]

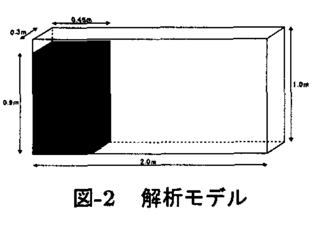

図-2　解析モデル

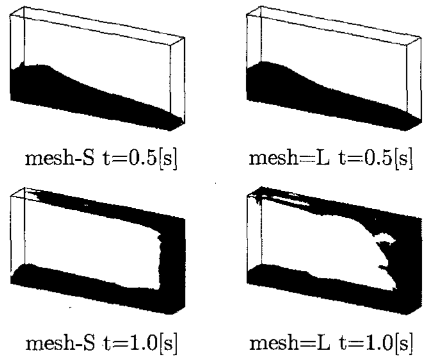

図-3 自由表面形状の時刻歴

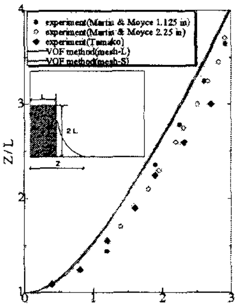

図-4 水際線の時刻歴

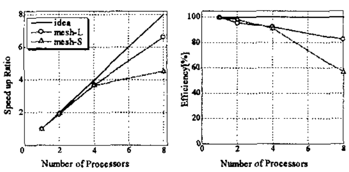

図-5　並列化効率

4. おわりに

本論文では，並列有限要素法を用いたVOF法による自由表面流れ解析手法を提案し，3次元ダムブレイク問題に適用して，計算精度の確認と並列化効率の検討を行った．その結果，以下の結論を得た．

- 水際線の移動速度について，実験値と比較的良い一致を示し計算精度の観点から有効性が確認できた．
- PCクラスター型並列計算機を用いた並列計算を行った結果，妥当な並列化効率を得る事ができた．

今後の課題としては，各種問題へ適用すると同時に，さらなる界面捕捉の精度向上に関する検討を行う予定である．

参考文献

1. C. W. Hirt, B. D. Nichols : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., 39, pp.201-225, 1981.
2. 根本深,桜庭雅明,樫山和男：並列安定化有限要素法を用いたVOF法による自由表面流れ解析, 第15回数値流体力学シンポジウム講演論文集CD-ROM,E07-3,2002.
3. J. C. Martin and W.J. Moyce. : An exxperimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp.312-324, 1952.
4. 玉古博朗：界面の分裂飛散を伴う流れ解析のための粒子法の開発, 東大修士論文, 160, 1994.