

(I-2)

浅水長波流れ解析のための安定化有限要素法

中央大学 学生員 ○黒川 洋平
日本工営 正会員 桜庭 雅明
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

本報告は、浅水長波流れ解析を安定かつ高精度に行うための安定化有限要素法を提案するものである。安定化手法として、移流項の卓越に対しSUPG法(Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin法)を、水位の振動に対し衝撃捕捉項(Shock-Capturing項)¹⁾を導入している。従来、衝撃捕捉項を用いる場合には、その中に含まれるパラメータを問題に応じて試行計算により決定していたが、本報告では時々刻々の計算結果からパラメータを動的に自動決定する方法を提案する。

本手法の有効性を検討するために、数値解析例としてダムブレイク問題と跳水問題による解析を取り上げ、パラメータを一定とする従来の方法との比較を行った。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\dot{\zeta} + M_{i,i} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_i + u_j M_{i,j} + gh(h+z)_{,i} \\ - \nu(M_{i,j} + M_{j,i})_{,j} + \frac{gn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} u_i = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 M_i は*i*方向の運動量、 h は全水深($=H+\zeta$: H は初期水深、 ζ は平均水面からの水位変動量)、 z は任意の基準面からの標高値、 g は重力加速度、 ν は渦動粘性係数、 n はマンニングの粗度係数である。

3. 有限要素方程式

式(1)、(2)に対してSUPG法に基づく有限要素法を適用すると、次式のような重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^* (\dot{\zeta} + M_{i,i}) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \tau \zeta_{,i}^* (\dot{\zeta} + M_{i,i}) d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta_c (\zeta_{,i}^* \zeta_{,i}) d\Omega = 0 \quad (3) \\ \int_{\Omega} M_i^* \{ \dot{M}_i + u_j M_{i,j} + gh(h+z)_{,i} \\ - \nu(M_{i,j} + M_{j,i})_{,j} + \frac{gn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} u_i \} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \tau (u_k M_{,k}^*) \{ \dot{M}_i + u_j M_{i,j} + gh(h+z)_{,i} \\ - \nu(M_{i,j} + M_{j,i})_{,j} + \frac{gn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{\frac{1}{3}}} u_i \} d\Omega \end{aligned}$$

KeyWords: 浅水長波流れ、衝撃捕捉項、安定化有限要素法
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL. 03-3817-1815, FAX. 03-3817-1803

$$+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta_m (M_{i,j}^* M_{i,j}) d\Omega = 0 \quad (4)$$

ここに、式(3)、(4)の左辺第1項は通常のGalerkin項、第2項がSUPG項、第3項が衝撃捕捉項である。 δ_c と δ_m は、それぞれ連続式と運動方程式に対する衝撃捕捉項のパラメータであり、次式により時々刻々の流れ場から自動決定するものとした。

$$\delta_c = \frac{1}{2} \frac{he}{h_{||}} \quad ; \quad h_{||} = \frac{h \nabla h}{|\nabla h|^2} \nabla h \quad (5)$$

$$\delta_m = \frac{1}{2} \frac{he}{u_{||}} \quad ; \quad u_{||} = \frac{u_i \nabla M_i}{|\nabla M_i|^2} \nabla M_i \quad (6)$$

ここに、 he は要素サイズである。なお、有限要素は三角形1次要素を用い、時間方向の離散化に対してはCrank-Nicolson法を用いた。

4. 数値解析例

(1) ダムブレイク問題

本手法の有効性を検討するために、衝撃捕捉項のパラメータを自動決定した場合と一定($\delta_c = \delta_m = \delta = \text{一定}$)にした場合における比較をダムブレイク問題を用いて行った。境界条件としては、水槽内の四方の壁においてスリッブ条件とし、初期条件としては図-1に示すように水位差を与えた。なお、水路幅は5.0mとし要素分割はx方向に25分割、y方向に50分割とした。

図-2、図-3は、4.0秒後における $y=0.0\text{m}$ 上の水位図である。図-2より、 $\delta=0$ の場合には数値的不安定により水位が大きく振動し、逆に $\delta=0.6$ の場合には水位の減衰が大きく見られる。 δ を変化させ試行計算を繰り返し、最も数値振動も減衰もなく計算できた場合は $\delta=0.06$ の場合である。図-3に本手法による結果を $\delta=0.06$ の場合の結果との比較を基に示す。図より、本手法による結果は $\delta=0.06$ の場合とよく一致しており、波形勾配もわずかながら大きく良好な結果となっている。図-4は、 $x=0.0\text{m}$ における水位の時刻歴について本手法の場合と $\delta=0.06$ の場合との比較を示す。図より、水位の時刻歴も本手法は $\delta=0.06$ の場合とよく一致している。図-5は、4.0秒後における自動決定された δ の分布図である。x方向の運動方程式に対する衝撃捕捉項パラメータ δ_m は、 $x=4\sim 6\text{m}$ で最も大きくなっている。これは、この区間で流速が大きくなるためである。y方向の運動方程式の衝撃捕捉項パラメータ δ_m の値は、y方向の流速がこの場合には生じていないので0となっている。連続式に対する衝撃捕捉項パラメータ δ_c は、 $x=10.0\text{m}$ に向かって徐々に大きくなっているが、これは式(5)より δ_c が全水深 h に比例するためである。

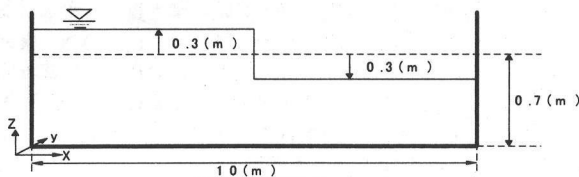


図-1 初期条件

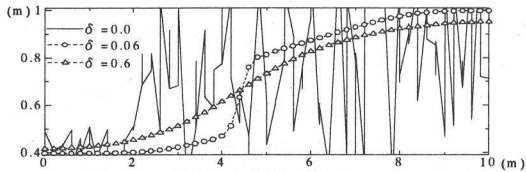


図-2 4.0秒後の水位図 ($\delta=0, 0.06, 0.6$)

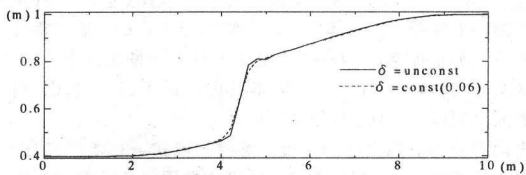


図-3 4.0秒後の本手法と $\delta=0.06$ での水位図

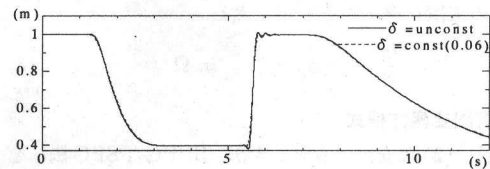


図-4 水槽左端における水位の時刻歴

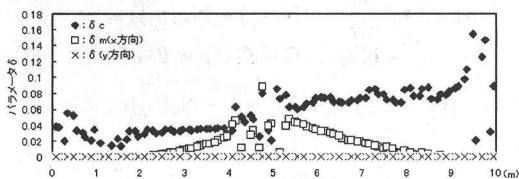


図-5 4.0(s)のパラメータ δ

(2) 跳水問題

次に, Mingham and Causon²⁾が計算を行った図-6に示すような跳水問題で, 本手法の有効性を検討した. 解析領域は50m×50m, 初期条件として貯水槽に10m, 氾濫原に1.0mの水深を与えた. 要素分割はx方向およびy方向ともに50分割とした.

図-7に0.69秒後の水位分布の比較を示す. 図中, Aは $\delta=0.0$ の結果, Bは $\delta=1.8$ の結果, Cは試行計算によりもっとも減衰も振動もなく解析できた $\delta=0.8$ の結果, Dは本手法による結果を示す. 図より, 本手法を用いることにより数値振動が抑えられていることがわかる. 図-8は, $x=25.0$ m上での水位を示している. 図より $\delta=0.8$ の場合と本手法による結果を比較してみると本手法の場合, $\delta=0.8$ の場合に見られる $x=12$ 及び38m付近での振動は抑

えられている. しかし, 本手法の場合, 最大の水位は約1.0m近く減衰した結果となっている. 水位が減衰した理由は, 本手法の連続式に対する衝撃捕捉項が式(5)のように全水深に比例した形で評価されるため, 連続式の衝撃捕捉パラメータが過大に評価されたものと考えられる.

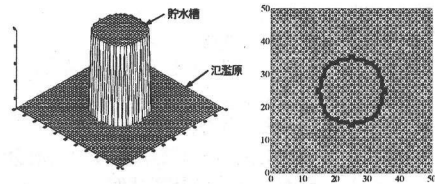
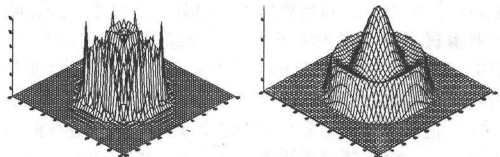


図-6 初期図



A : $\delta=0.0$

B : $\delta=1.8$

C : $\delta=0.8$

D : 本手法

図-7 水位分布の比較

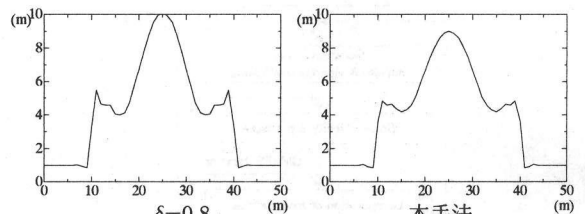


図-8 $y=25.0$ mにおける水位図

5. おわりに

本報告では, 浅水長波流れ解析のための安定化有限要素法として, 安定化の項である衝撃捕捉項のパラメータを流れ場から自動決定する方法を提案した. 数値解析例として, ダムブレイク問題と跳水問題の解析を行い, 本手法の有効性について検討した. その結果, 本手法を導入することにより試行計算を行うことなく妥当な解析結果が得られることが明らかとなった. ただし, パラメータの決定方法には検討の余地があり, 今後の課題としたい.

参考文献

- 1) Thomas J. R. Hughes, Michel Mallet And Akira Mizukami : A New finite element formulation for computational fluid dynamics beyond SUPG: *Comp. Methods. in. Appl. Mech. and. Engng. Vol.54*, pp 341-355, 1986
- 2) C. G. Mingham and D. M. Causon : High- resolution finite- volume method for shallow water flows, *J. Hydr. Engng, ASCE, Vol. 124*, No. 6, pp. 608- 609, 1998