

(I-1) 非均一媒質における音の伝播に関する有限要素解析

日本大学大学院 学生会員 石川 潤
日本大学理工学部 正会員 野村卓史

1. はじめに

大気の大気や密度が均一でなく、音速が一様でないとき、音波の屈折により音が遠方まで伝播するという報告がある¹⁾。このような非均一媒質中の音の伝播を解析することが、本研究の目的である。その基礎的な検討として、音場の基礎方程式であるヘルムホルツ方程式を用いて、異なる二層の気体間の音波の屈折について有限要素法による解析を行い屈折の法則であるスネルの法則との比較を行ったので報告する。

2. 解析方法

媒質の密度と、音速が空間的に分布し、その分布が時間変化しないときの波動方程式は、式(1)のように表される。また式(1)より導かれるヘルムホルツ方程式は式(2)である。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0 \quad \dots(1) \quad \rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \dots(2)$$

ここで c は音速, p は音圧, t は時間, ρ は媒質密度, $\nabla^T = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$, ω は角周波数である。

有限要素解析を行うため、解析領域を線形三角形要素で分割する。一つの要素における音場の運動エネルギー T_e 、ポテンシャルエネルギー V_e 、外部からなされる仕事 W_e は、式(2)から、それぞれ式(3)、式(4)、式(5)、で与えられる²⁾。

$$T_e = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_e \omega^2} \iint_e \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad \dots(3) \quad V_e = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_e c_e^2} \iint_e p^2 dx dy \quad \dots(4)$$

$$W_e = \int_{\Gamma_d} p u_n ds \quad \dots(5)$$

ここで要素内で音速 c_e 、媒質密度 ρ_e は一定とした。 Γ_d は固体壁、 u_n は Γ_d に作用する空気の数、 s は境界に沿った座標である。固体壁以外の放射境界には無限要素を用いている。

解析領域全体に関する汎関数 L は式(6)のようになり、その停留条件から有限要素方程式を導き節点音圧を求める。

$$L = \sum_e V_e - \sum_e T_e - \sum_e W_e \quad \dots(6)$$

3. 音速と密度の関係

空気中を伝わる音速 c と空気密度 ρ 、体積弾性率 B の関係は式(7)³⁾で表され、空気密度 ρ 、音速 c と気温 t の関係は、式(8)⁴⁾、式(9)³⁾で表すことができる。

$$c = \sqrt{B/\rho} \quad \dots(7) \quad \rho = \frac{1.293}{1 + 0.0036567 \times t} \quad \dots(8) \quad c = 331.5 \times \sqrt{\frac{273+t}{273}} \quad \dots(9)$$

式(7)～式(9)を用いて、気温を -50°C から 50°C まで変化させたときの、密度、音速、体積弾性率の変化を表したものが図1、2である。

キーワード：ヘルムホルツ方程式、音波の屈折、有限要素法

連絡先：東京都千代田区神田駿河台 1-8-14, Tel/Fax 3259-0411

図1, 2から, 音速
空気密度の変化に比べ,
体積弾性率はほぼ一定
といえる。このことか
ら, 空気では, ρc^2 が
一定であるということ
がわかる。この結果か
ら解析にも ρc^2 一定と
いう条件を用いる。

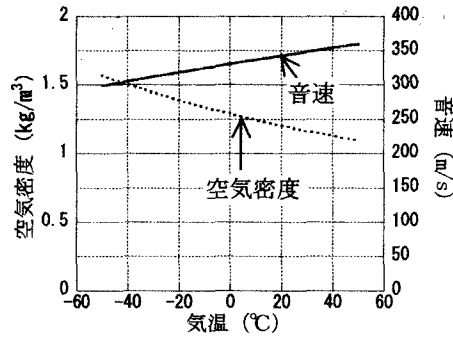


図1 気温と音速, 空気密度の関係

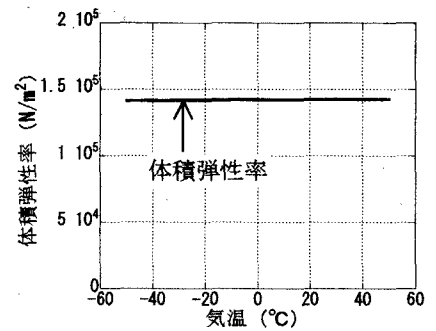


図2 気温と体積弾性率の関係

4. 解析モデル

解析に用いた有限要素メッシュと寸法を図3, 解析条件を表1に示す。解析領域を2層に分け, 解析領域全体で ρc^2 一定であるようにした。音源は下辺中央, 境界条件は, 下辺が音を完全反射する固体壁, 残りの3辺は, 音が無限遠方に伝わる放射境界である。

表1 解析条件

		密度 ρ (kg/m³)	音速 c (m/s)	体積弾性率 B (N/m²)
①	媒質1	3.6	400.0	5.760×10^5
	媒質2	1.2	692.8	5.760×10^5
②	媒質1	1.2	692.8	5.760×10^5
	媒質2	3.6	400.0	5.760×10^5

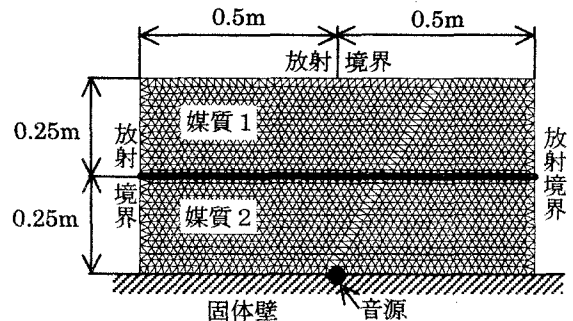


図3 解析モデル

5. 解析結果

二つの条件の音圧分布を図4, 5に示す。いずれの図も, 等音圧線が媒質間の境界で折れている。音波の進行方向は音圧勾配の方向であるので, 等音圧線に直交する方向である。図中の矢印はスネルの法則に従った屈折の方向を表している。境界面において, 媒質1の屈折角である等音圧線に直交する方向を求め, その点においてスネルの法則が定める入射角を計算して, 入射角と屈折角を算定したものである。

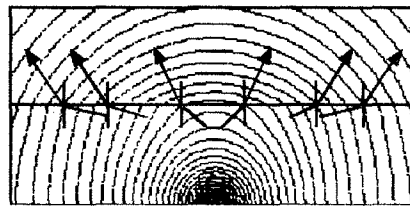


図4 解析結果 (解析条件①)

	$\rho 1$	c_1
媒質1	3.6	400.0
	$\rho 2$	c_2
媒質2	1.2	692.8

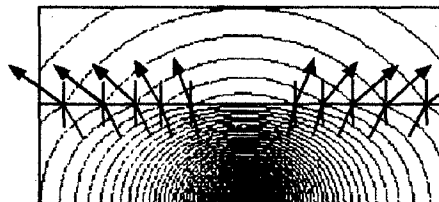


図5 解析結果 (解析条件②)

	$\rho 1$	c_1
媒質1	1.2	692.8
	$\rho 2$	c_2
媒質2	3.6	400.0

6. まとめ

図4, 5に描かれているスネルの法則に従った矢印の方向は, 等音圧線にほぼ直交しており, 屈折の法則をよく満足しているといえる。これにより, ヘルムホルツ方程式を用いて, 密度変化, 音速変化を考慮した音場の解析が可能であるとの見通しを得た。

参考文献 1) 社団法人日本騒音制御工学会編: 地域の音環境計画, 技報堂出版, pp194-195, 1997.

2) 加川幸雄編著: FEM プログラム選3 音場・圧電振動場, 森北出版, pp1-2, 1998

3) 時田保夫監修: 音の環境と制御技術, 第1巻基礎技術, 株式会社フジ・テクノシステム, pp13-14, 2000.

4) 国立天文台編: 理科年表, 丸善株式会社, p443, 1996.