(Ⅰ－64)　VOF法による自由表面流れ解析の精度向上に関する検討

中央大学　学生員　○根本　深
日本工営株式会社　正会員　桜庭雅明
中央大学　正会員　樫山和男

1. はじめに

自由表面を有する流れを解析することは工学上重要な問題である．自由表面流れの解析手法には，自由表面を直接的に表現するLagrange的手法と，自由表面を間接的に表現するEuler的手法があり，それぞれいくつかの手法が提案されている．本研究の対象とするVOF法[1](Volume of Fluid method) はEuler的手法の一つであり，砕波のような複雑な自由表面の挙動を捉えるのに有効な手法である．しかし，計算の進行と共に界面が拡散し，解析精度が低下するという欠点を持っている．

本報告では，この問題を解決するために，安定化有限要素法(SUPG/PSPG法)[2]を用いたVOF法に，界面鋭敏化手法（Tezduyarらの鋭敏化手法[3]，Level Set Function法[4]，Tangent変換によるDigitizer法[5]）を導入して解析を行い，鋭敏化手法の有効性の検討と，手法による結果の差異について考察した．

2. 数値解析手法

VOF法はEuler的手法の一つであり，界面関数により自由表面を間接的に表して解く方法である．この方法では，解析は流れ場の計算と自由表面の計算の２段階に分けられる．流れ場の計算では，Navier-Stokes方程式と連続式から流速，圧力を求め，自由表面の計算では，流れ場の計算で求めた流速を用いて界面関数に関する移流方程式を解き，自由表面の位置を求めていく．

(1) 流れ場の計算

流れ場の計算では(1)，(2)に示す，Navier-Stokesの運動方程式と，非圧縮流体の連続式を基礎方程式として，流速と圧力を求める．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j u_{i,j}-f_i\right)-\sigma_{ij,j}=0 \qquad in\ \Omega \tag{1}$$

$$u_{i,i}=0 \qquad in\ \Omega \tag{2}$$

ここに，ρは密度，u_iは流速，f_iは物体力である．σ_{ij}は応力テンソルであり，以下の式で表される．

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{3}$$

ここに，p は圧力，μは粘性係数である。式(1),(2)に安定化有限要素法（SUPG/PSPG法）を適用すると，以下の有限要素方程式が得られる．

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(\mathbf{N}(u_j)+\mathbf{N}_\delta(u_j)\right)u_i +\mathbf{K}u_i-(\mathbf{G}+\mathbf{G}_\delta)p=\mathbf{F}+\mathbf{F}_\delta \tag{4}$$

$$\left(\mathbf{G}^t+\mathbf{G}_\varepsilon^t\right)u_i+\mathbf{M}_\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial t}+\mathbf{N}_\varepsilon(u_j)u_i+\mathbf{G}_\varepsilon p=\mathbf{F}_\varepsilon \tag{5}$$

ここに，**M**，**N**，**K**，**G**，は係数行列，**F**は外力ベクトルであり，添字δはSUPG項に起因するものを表し，添字εはPSPG項に起因するものを表している．時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用し，圧力及び連続式は陰的に取り扱った．なお，連立1次方程式の解法にはElement-by-Element Bi-CGSTAB法を用いた．

(2) 自由表面の計算

VOF法では自由表面を間接的に表現するため、液体であるか気体であるかを表す指標として界面関数ϕを導入している。界面関数ϕは0～1の値をとり，ある点においてその点が液体であるなら$\phi=1$，気体であるなら$\phi=0$，自由表面は$\phi=0.5$として初期条件を与えている。各節点の密度ρ，粘性係数μは界面関数ϕを用いて式(6),(7)により決定される．

$$\rho=\rho_l\phi+\rho_g(1-\phi) \tag{6}$$

$$\mu=\mu_l\phi+\mu_g(1-\phi) \tag{7}$$

ここに，ρ_lは液体の密度，μ_lは液体の粘性係数，ρ_gは気体の密度，μ_gは気体の粘性係数である．自由表面の運動学的条件から，自由表面上の流体粒子は常に自由表面上に存在する．従って界面関数ϕを流れ場の計算から求めた流速u_iで移流させることにより、自由表面の位置を決定することができる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u_i\phi_{,i}=0 \qquad in\ \Omega \tag{8}$$

式(8)に安定化有限要素法（SUPG法）を適用すると，以下の有限要素方程式が得られる．

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\mathbf{N}(u_i)+\mathbf{N}_\delta(u_i)\right)\phi=0 \tag{9}$$

ここに，**M**，**N**は係数行列であり，添字δはSUPG項に起因するものを表している．時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用した．また，連立1次方程式の解法にはElement - by - Element Bi-CGSTAB法を用いた．

(3) 界面の鋭敏化手法の導入

計算の進行に伴う界面関数の数値拡散を抑制するために界面の鋭敏化を施した．まず界面鋭敏化を行う前に，毎計算ステップでTezduyarら[3]の提案による式(10)を実行して，界面関数の値が0から1の間に収まるようにした．

$$\begin{aligned}\phi &\leftarrow 1 \qquad (\ if\ \ \phi\geq 1.0\ )\\ \phi &\leftarrow 0 \qquad (\ if\ \ \phi\leq 0.0\ )\end{aligned} \tag{10}$$

次に液体と気体の境界（界面）を鋭敏化するために，任意の計算ステップ毎に以下のa)～c)の鋭敏化処理を施した．

a) Tezduyarらの界面鋭敏化手法

Tezduyarら[3]の提案している鋭敏化の式は次式である．

$$\begin{aligned}&for|\phi_{n+1}\phi_n|\leq b\\ &\qquad\phi\leftarrow 2^{a-1}\phi^a \qquad (0.0\leq\phi\leq 0.5)\\ &\qquad\phi\leftarrow 1-2^{a-1}(1-\phi)^a(0.5\leq\phi\leq 1.0)\end{aligned} \tag{11}$$

ここにa，bは任意の定数である．本研究では文献3）と同様にa=2.0，b=0.1を用いている．

Key Word: 有限要素法，VOF法，界面鋭敏化
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

b) Level Set Function法

式(12)に示すHeaviside関数を用いて鋭敏化を行う．本報告では文献4) と同様に$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$を用いた．

$$\phi \leftarrow H(\phi) = \begin{cases} 0 & if 0.5 - \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} sin\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & if 0.5 - \phi \leq \varepsilon \\ 1 & if 0.5 - \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (12)$$

c) Tangent変換によるDigitizer法

物理量ϕ を解く代わりに，式(13) のようにTangent変換を行った変数hを用いて解析し，計算結果を式(14) で逆変換して物理量ϕ を求める．

$$h = tan\alpha \cdot \pi(\phi - 0.5) \quad (13)$$

$$\phi = arctan(h)/(\alpha\pi) + 0.5 \quad (14)$$

係数αは$\phi = 0$または1の時，$h = \infty$にならないようにするための変数で、本研究ではYabeら[5]の適用した$\alpha = 0.99$を使用した．

3. 数値解析例

(1) 解析モデル

解析例として，矩形タンクのスロッシング解析を行った．図－1に示すように，縦1.0 m×横1.0 mの解析領域を縦100分割×横100分割し，10201節点，20000要素のメッシュを用いて解析した．液体は水を，気体は空気を仮定し，密度及び粘性係数は20℃における値[6](水：$998.0kg/m^3$，$1.00\times10^{-3}Pa$・秒，空気:$1.205kg/m^3$，$1.81 \times 10^{-5}Pa$・秒)を使用した．境界は固体壁とし，free-slip条件を与え，微小時間増分量$\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ 秒とした．入力波として式(15)に示す正弦波を与えた．

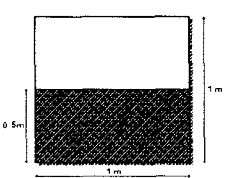
$$u = -a\omega cos\omega t \quad (15)$$

なお，振幅:a=0.0093m，各速度:ω = 5.311rad/秒を用いている．

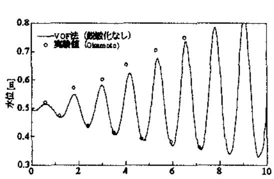
(2) 解析結果

a) 界面鋭敏化を行わない場合

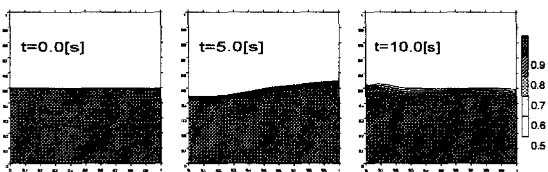
図－2は左壁での水位の時刻歴を実験値[7] と比較したものである．VOF法の解析結果は実験値と良く一致している．しかし，図－3に示す各時刻における界面関数の分布をみると，計算の進行と共に自由表面付近で界面関数が拡散し，界面捕獲の精度が低下していることがわかる．



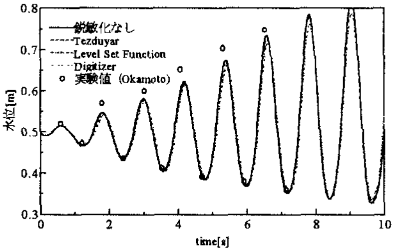
図－1 タンクの解析モデル



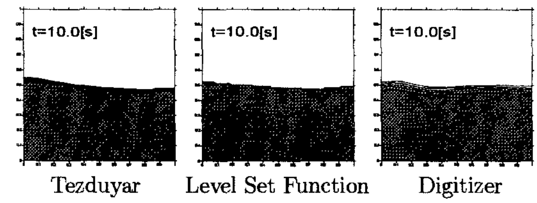
図－2 左壁での水位の時刻歴（鋭敏化を行わない場合）



図－3 界面関数分布（鋭敏化を実行しない場合）



図－4 左壁での水位の時刻歴（鋭敏化を実行した場合）



図－5 界面関数分布（鋭敏化を実行した場合）

b) 界面鋭敏化を実行した場合

図－4は左壁での水位の時刻歴である．鋭敏化を行わない場合に比べ，解析精度が若干低下しているものの，図－5の界面関数分布を見ると，各手法の効果により界面が鋭敏に保たれていることがわかる．同じ時間間隔で界面鋭敏化を実行した場合，Level Set Function法，Tezduyarらの鋭敏化手法，Digitizer法の順に鋭敏化の効果があった．比較した3つの界面鋭敏化手法の中では，Tezduyarらの手法がもっとも精度の低下が少なく，かつ界面を鋭敏に保つことに優れていることが分った．

4. 結論

本研究では安定化有限要素法を用いたVOF法による自由表面流れ解析に界面鋭敏化手法の適用を行った．数値解析例として矩形タンクのスロッシング解析を取り上げ，各界面鋭敏化手法の違いによる解析結果の差異についての検証を行った．その結果，以下の結論を得た．

- 同一の時間間隔で実行した場合，Level Set Function法，Tezduyarの界面鋭敏化手法，Tangent変換によるDigitizer法の順に鋭敏化の効果が強い．
- Tezduyarの鋭敏化手法が最も解析精度を低下させることなく，界面を鋭敏に保つ事が出来る．
- 界面鋭敏化を過度に行うと，自由表面形状の解析精度が低下する．そのため，適用には十分な検討が必要である．

今後の方針として，界面鋭敏化の最適な適用方法を検討し，汎用性を高めていく予定である．

参考文献

1) C.W.Hirt and B.D.Nichols, : Volume of Fuluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries , J.Comput.Phys, 39,pp201-225, 1981.
2) Tayfun E. Tezduyar , S.Mittal , S.E.Ray and R.Shih : Imcompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements , Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. , 95, pp221-242, 1992.
3) Tayfun E. Tezduyar:流れのシミュレーションとモデリングの進歩, 有限要素法による流れのシミュレーション, 日本数値流体力学会有限要素法研究委員会編シュプリンガー・フェアラーク東京:1998.
4) 槙原孝文, 棚橋隆彦：Level Set Methodを用いた自由表面流れの数値解析, 第10回数値流体力学シンポジウム講演論文集, p384-385, 1996. .
5) Yabe, T. and Xiao, F.(1995):description of complex and sharp interface with fixed grids in incompressible and compressible fluid , Comp. Math. Applic., Vol.1, pp.15-25
6) 伊藤英覚, 本田 睦:流体力学, 丸善, 1981.
7) 岡本隆：任意ラグランジェ・オイラー有限要素法による大規模スロッシング解析に関する研究, 中央大学学位論文, 1992.