

1. はじめに

近年、有限要素法による流れ問題の数値解析においては様々なアルゴリズムが提案されている。本研究ではベクトルの外積を用いたマーカー粒子FEMにより非定常非圧縮の比較的レイノルズ数($Re = \rho UL / \mu$)の低い放射流問題を解析し数値解と理論解の比較を行う。

数値解析では初期条件として境界に流速を与え、流体が放射状に移動したときの位置を解析する。理論解はナビエ・ストークスの方程式を直接解くことにより流体の移動した位置を求める。解析に際しては Δx 、 Δt 及び r 方向の速度 u_r を考慮し、数値解の解の精度等について検討する。次に流体が自重で放射状に流動する問題の解析を行う。この解析では初期時刻の流体の体積が、ある時刻で保存されているかを確認し、 Δt の選び方による流動形状の相違について考察する。

2. 支配方程式

非定常非圧縮性流体の支配方程式は以下のように示される。

運動方程式(ナビエ・ストークスの方程式)

$$\rho u_{i,j} + \rho u_j u_{i,j} = \sigma_{ji} + b_i \quad (1)$$

$$\text{連続の式} : u_{i,i} = \varepsilon_{ii} = 0 \quad (2)$$

$$\text{構成方程式} : \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (4)$$

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ji})} \quad (6)$$

$$\text{境界条件} : u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \quad (7)$$

$$v_j \sigma_{ij} = \bar{T}_i \quad \text{on } S_t \quad (8)$$

ここに、 ρ は密度、 u_i は速度ベクトル、 σ_{ij} は応力テンソル、 σ'_{ij} は偏差応力テンソル、 p は圧力、 μ は粘性係数、 v_j は単位法線ベクトルの方向余弦、 $(-)$ は既知量を示す。 $\bar{u}_i$ は境界 S_u 上で定義された既知の速度、 $\bar{T}_i$ は境界 S_t で定義された既知のトラクションである。

3. ベクトルの外積を用いたマーカー粒子FEM¹⁾

マーカー粒子FEMは、流体を複数のマーカー粒子で表現し、それらの粒子を節点で求めた流速に応じて要素間を移動させることにより流体の自由表面位置と流動形状を可視化できる。

本研究ではマーカー粒子の移動した要素を特定するためにベクトルの外積を用いたマーカー粒子FEMを使用した。この方法は任意の三角形要素Iを構成する3辺に沿って定義する基準ベクトル $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

と、要素Iの3つの頂点と移動後のマーカー粒子とを結ぶ基準ベクトル $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ のそれぞれについて外積計算を行う。そして、その正負の符号の組み合わせにより要素間を移動するマーカー粒子の位置を特定する方法である。

4. 数値解析例

ここでは、ベクトルの外積を用いたマーカー粒子FEMにより理論解が分かっている流れ問題の数値解析を行い、得られた数値解と理論解を比較する。

(1) 境界で与えた流速により流動する放射流問題

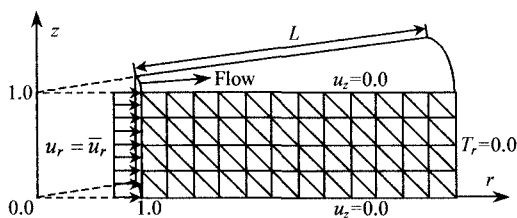


図-1 有限要素分割図 ($\Delta x=0.25$ のとき)

最初に行う数値解析例では初期条件として境界に流速を与えた問題を解析する。

図-1にこの問題の解析領域を示す。マーカー粒子は $r=1.0$ の位置に8個配置した。壁面の境界は上下ともにslip条件とし、 $r=L$ の境界ではトラクションはなしとする。

この問題における理論解は軸対称での式(1)を解くことにより求められる。 r 方向のみ流速が存在するとすれば、式(1)は、

$$u_{r,r} + u_r / r = 0 \quad (9)$$

である。境界条件($u_r = \bar{u}_r$ at $r=1$)より、式(9)は、

$$u_r = \bar{u}_r / r \quad (10)$$

となり、流体の位置 r を時間 t で表すと式(10)は、

$$r = \sqrt{2\bar{u}_r t + 1} \quad (11)$$

となる。表-1は $u_r=1.0$ 、 $\Delta x=0.25$ 、 $\Delta t=0.1, 0.05, 0.01$ としたときの式(11)より求めた理論解と数値解析により求めたマーカー粒子の位置の時刻歴、および誤差を示している。この表における誤差は以下に示す式より求めている。

$$\text{Error} = \sqrt{\sum_{i=1}^7 (r_i^c - r_i^t)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^7 (r_i^t)^2} \quad (12)$$

ここで、式(12)における c と t は解析値と理論値を示す。この表より Δt が短いほど解析値が理論値に近づいているのが分かる。

表-1 解析値と理論値の比較

時刻 (t)	理論値 (r)	解析値(r)		
		$\Delta t=0.1$	$\Delta t=0.05$	$\Delta t=0.01$
1	1.7321	1.7554	1.7414	1.7310
2	2.2361	2.2516	2.2458	2.2361
3	2.6458	2.6673	2.6565	2.6458
4	3.0000	3.0427	3.0078	2.9999
5	3.3166	3.3596	3.3225	3.3166
6	3.6056	3.6463	3.6104	3.6050
7	3.8730	3.9228	3.8779	3.8725
誤差 ($\times 10^{-3}$)		11.9918	2.6475	0.1672

次に Δt が数値解の精度にどのように影響しているかを考察するためにクーラン数 ($u_r \cdot \Delta t / \Delta x$) を考慮して図-1の放射流問題を解析する。図-2は $u_r=1$ 、 $\Delta x=0.5, 0.25, 0.125$ としてクーラン数を1から0.001まで変化させたときの理論解と数値解の誤差を示している。この図からクーラン数が小さくなると誤差に変動が見られないことがわかる。

次に $\Delta x=0.5$ として $u_r=1, 5, 10$ と変化させ数値解析を行う。又、このときの R_e 数は L を代表長、 $\bar{u}_r$ を代表流速 U として3.5, 42.5, 115である。図-3に示されるように流速を変化させた時もクーラン数が小さくなると誤差の変動はあまり見られない。

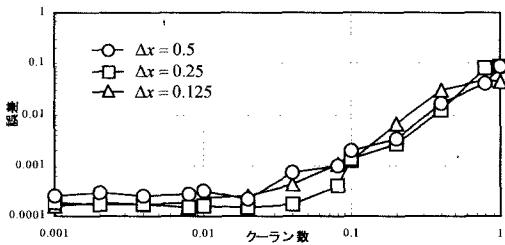


図-2 クーラン数と誤差の関係 (u_r = 一定)

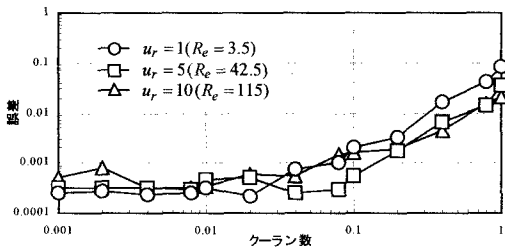


図-3 クーラン数と誤差の関係 (Δx = 一定)

(2) 流体の自重で流動する放射流問題

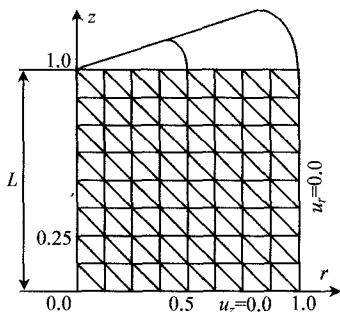
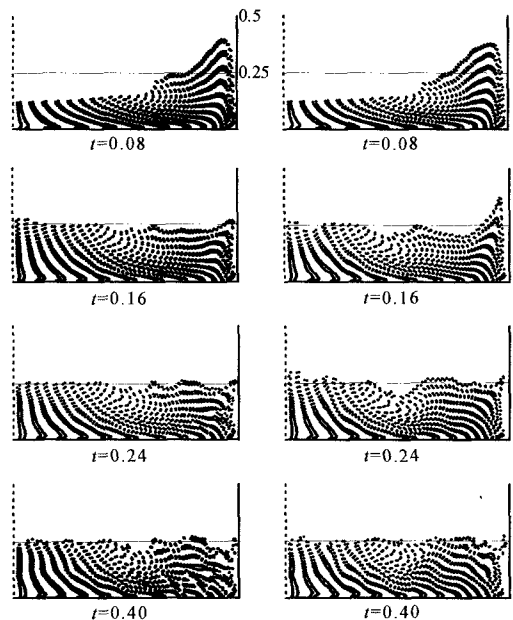


図-4 有限要素分割図

次に自重で流動する放射流問題の数値解析を行う。この問題では流速に対する理論解は式(1)からは求められない。そこで初期時刻の流体の体積が、ある時刻経過後に保存されているかを確認する。ここでは初期時刻に $r=0.5, z=1.0$ 内(図-4の影で示す領域)に流体が満たされており、ある時刻経過すると $r=1.0, z=0.25$ 内に流体が満たされる。

図-4はこの問題の解析領域を示している。解析領域は128要素、289節点で構成されており、壁面の境界はslip条件とする。マーカー粒子は領域内に1024個配置する。尚、この問題における代表長 L 、代表流速 $U = \sqrt{2gL}$ を考え $R_e = 44.3$ として解析を行う。図-5(a)・(b)にマーカー粒子の分布の時刻歴を示す。図-5(a)に用いたクーラン数は0.044、(b)は0.0044である。ここで t の単位は $[L/U]$ である。この図からクーラン数により流動形状の違いはあるが、両者とも $t=0.4$ で初期時刻の流体の体積をほぼ満足する結果を得たことがわかる。



(a)クーラン数0.044

(b)クーラン数0.0044

図-5 マーカー粒子分布の時刻歴

5. おわりに

本研究ではベクトルの外積を用いたマーカー粒子FEMの数値解の精度について放射流問題を使って検討した。最初に行った数値解析では理論解のある問題を解析し比較的精度の良い解が得られた。次に行った数値解析ではある程度クーラン数を小さく取ること、マーカー粒子により流体の流動形状を良く可視化できることを示した。

参考文献

- 1) Toda, T., Hovanotayan, S. & Shimazaki, Y. 1999. Visualization of Unsteady Creeping Viscous Flows Using Vector Products, *IJCFD*, Vol. 12, pp. 257-267.