

(I-61) セル構造体に対する平均化手法の適用性の検討

宇都宮大学工学部 学生員 小竹 正幸 宇都宮大学工学部 正会員 斉木 功
宇都宮大学工学部 正会員 中島 章典 宇都宮大学工学部 学生員 大植 健

1. はじめに

いわゆる母材・介在物から成る複合材料の平均物性評価については、これまで多くの研究がなされている¹⁾。しかし、単なる母材・介在物系ではなく、セル構造体²⁾のように剛性の高い介在物が骨組構造を形成し、変形に抵抗するような複合材料に対する適用性の検討が十分行われたとはいえない。そこで本研究では、前述したような特徴を持つ複合材料を対象とし、均質化法をはじめ、いくつかの一般的な平均化手法による解析結果から、それらの平均化手法の適用性を検討する。

2. 解析方法

いわゆる平均化手法は、ある非均質な材料の巨視的な応答を統計的に代表するような領域である代表体積要素 (RVE) に対し、巨視的なひずみ、もしくは応力を与え、その共役量を求め平均物性を評価する方法である。本研究で用いる平均化手法は、RVE に対して、境界に一定ひずみに起因する変位を与えて、それによる平均応力により平均物性を評価する方法 (以後、一定変位境界と呼ぶ)、境界に一定応力に起因する表面力を作用させ、それによる平均ひずみによりコンプライアンスを評価する方法 (以後、一定応力境界と呼ぶ)、およびいわゆる均質化法である。

一定変位境界と一定応力境界で評価される平均化弾性テンソルを E^t , E^d とし、均質化法で評価される平均化弾性テンソルを E^H とすると、この3つの平均化弾性テンソルの間には、次のような関係がある事が知られている³⁾。

$$E^t \leq E^H \leq E^d \quad (1)$$

(1) 一定変位境界による平均物性

基礎式となる釣り合い式の弱形式は

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (2)$$

であり、これを境界条件

$$u_i^{pq} = \epsilon_{ij}^{pq} x_j \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3)$$

のもとで解く。ここに、 Ω は RVE の定義される領域であり、 $\partial\Omega$ はその境界、 ϵ_{ij}^{pq} は $\epsilon_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$ なる一定ひずみを表す。このとき、平均化弾性テンソルは

$$E_{ijpq}^t = \frac{1}{V} \int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} d\Omega \quad (4)$$

により得ることができる。ここに、 $V = \int_{\Omega} d\Omega$ である。

(2) 一定応力境界による平均物性

基礎式となる釣り合い式の弱形式は

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nu_j \sigma_{ij}^{pq} v_i dS \quad (5)$$

である。上式右辺が一定応力による表面力ベクトルを表している。ここに、 ν_j は境界面における単位外向き法線ベクトル、 σ_{ij}^{pq} は $\sigma_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$ なる一定応力を表す。このとき、平均化コンプライアンステンソルは

$$D_{ijpq} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} d\Omega \quad (6)$$

と求められる。これより、平均化弾性テンソルは次式で与えられる。

$$E_{pqij}^t = D_{ijpq}^{-1} \quad (7)$$

(3) 均質化法による平均物性

均質化法の定式化は、漸近展開や一般化収束論によって行われるが、ここでは、それらの方法によって定式化される均質化法の微視問題の実際の計算アルゴリズムから以下のように解釈する。

基礎式となる釣り合い式の弱形式は

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} + \epsilon_{kl}^{pq} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (8)$$

であり、これを周期境界条件

$$u_i^{pq}(x_j) = u_i^{pq}(x_j + \eta_j^k) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (9)$$

のもとで解く。ここに、 ϵ_{ij}^{pq} は $\epsilon_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$ なる一定ひずみ、 η_j^k は単位周期構造の大きさを表す基本周期ベクトルである。このとき、平均化弾性テンソルは

$$E_{ijpq}^H = \frac{1}{V} \int_{\Omega} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^{pq}}{\partial x_l} + \epsilon_{kl}^{pq} \right) d\Omega \quad (10)$$

である。

このような解釈では、均質化法は RVE に対して一定ひずみを与え周期境界条件を満たすミクロ変位を求め、ミクロ変位と一定ひずみによる平均応力により平均物性を評価する方法であるとも言える。

3. 解析モデル

正六角形セル構造体の基本周期構造として、図-1 に示す、983 節点、918 四辺形要素の解析モデルを用いる。ここで、黒色で示した部分がセルを構成する部材である。この正

Key Words: セル構造体, 平均化手法, 微視構造, 代表体積要素, 均質化法

〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2 宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6208 Fax.028-689-6230

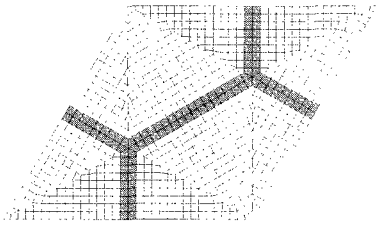


図-1 解析モデル

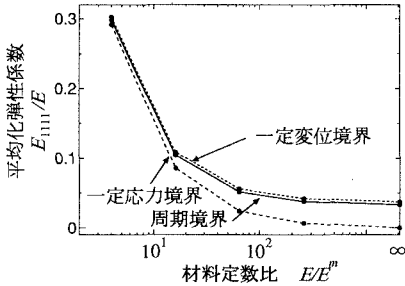


図-2 材料定数比と平均化弾性係数の関係 (E_{1111} 成分)

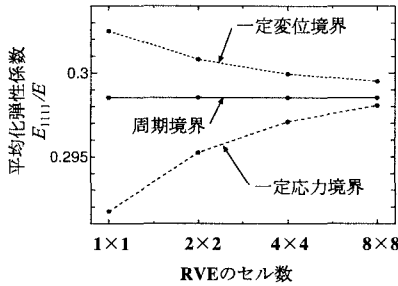


図-3 材料定数比4の場合における RVE のセル数と平均化弾性係数の関係 (E_{1111} 成分)

六角形セルの一辺の長さとその太さの比である縦横比を $1/9$ とし、セルを構成する材料は弾性係数 E 、Poisson 比ゼロ、セルの空隙を埋める母材は弾性係数 E^m 、Poisson 比ゼロのともに等方線形弾性体とする。このとき、材料定数比 E/E^m を変化させることによって、得られる平均物性の収束特性を調べる。また、 $E/E^m = \infty$ の極限として、母材のないモデルの解析も行った。

4. 解析例および考察

(1) 材料定数比 E/E^m の影響

1×1 個のセルを持つ RVE について、材料定数比と E で無次元化された平均化弾性テンソル成分 E_{1111}/E との関係を表したのが図-2 である。他の成分についても、 E_{1111} 成分と同様な結果が得られたため、ここでは E_{1111} 成分のみにて議論することとする。さらに、 $E/E^m = \infty$ の極限での周期境界の平均化弾性テンソルは、 $E_{1111}^H/E = 3.32 \times 10^{-2}$ である。これらの結果から、一定変位境界による平均

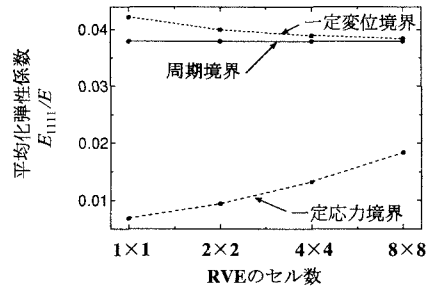


図-4 材料定数比 256 の場合における RVE のセル数と平均化弾性係数の関係 (E_{1111} 成分)

化弾性テンソルは、材料定数比が大きくなっても周期境界によるそれと近い値となる。しかし、一定応力境界と周期境界の平均化弾性テンソルは、材料定数比が大きくなるにつれ、大きな差が生じる。一定応力境界では、文字通り材料によらない一定の応力が境界に作用するため、介在物であるセルを形成する骨組の剛性に対して、剛性の小さな母材のひずみが支配的になるためである。したがって、材料定数比 ∞ の極限では、一定応力境界による弾性テンソル成分はゼロとなる。

(2) RVE に含まれるセル数の影響

RVE とする領域が十分に大きくなれば、どの平均化手法を用いても、等しい平均物性が得られると考えられる。したがって、ここでは RVE 内に $1 \times 1 \sim 8 \times 8$ のセル数を有する場合の解析を行い、それぞれの手法による弾性テンソル成分の収束性を確認する。

材料定数比が 4、256 における RVE のセル数と無次元化した平均化弾性テンソル E_{1111}/E との関係を表したのが図-3、4 である。どちらの場合も、今回用いたセル構造体の RVE の周期性から、一定変位境界および一定応力境界での平均化弾性テンソルは RVE のセル数の増加に伴い均質化法での平均化材料テンソルの値に近づく。また、材料定数比が 4 の場合 (図-3) では、一定変位境界、一定応力境界の周期境界への収束性はほぼ同様である。それに対し、材料定数比が 256 の場合 (図-4) では、一定変位境界の収束性は材料定数比 4 の場合とさほど変わらないが、一定応力境界の収束性は材料定数比 4 の場合に比べ、著しく低下している。

参考文献

- 1) 寺田賢二郎, 堀宗朗, 京谷孝史: 非均質材料のためのマルチスケール解析モデリングについて, 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 177-184, 1998.
- 2) L. J. Gibson and M. F. Ashby: *Cellular solids*, Cambridge, N1997.
- 3) S. Nemat-Nasser and M. Hori: *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, 1999.