(Ⅰ－57)　エレメントフリー法を用いた二次元問題の解析

足利工業大学大学院　学生会員　内田伸一郎
足利工業大学　正 会 員　末武　義崇
足利工業大学大学院　学生会員　石山竜太郎

1．はじめに

エレメントフリー法（EFGM）は、新しい数値解析法として、多くの研究報告がなされている。特に、筆者らは Lagrange の多項式を変位関数として用い、比較的簡明な EFGM の定式化を試みてきた。実際、構築した新たな EFGM を梁や薄板の有限変位解析に適用し、その妥当性や有用性を示してきた。

本研究では、考案したエレメントフリー法の解析例を蓄積するために、二次元問題の解析に適用し、既往の文献の解析解[1]との比較検討を実施した。

2．エレメントフリー法の定式化

図 1 に示すような評価点(x ,y)を中心とする、1 辺の長さが 2ρ のサポート領域を考える。評価点近傍の変位 $u(x,y)$、$v(x,y)$ をサポート領域内部の $(N+1)^2$ 個の節点変位 $u_{ij}, v_{ij}\,(i,j=0\sim N)$ 用い、次の Lagrange の多項式によって表現する。

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y) \\
v(x,y) &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} v_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ここで、$\varphi_i(x)$ および $\psi_j(y)$ は Lagrange 基底であり、$\varphi_i(x_m)=\delta_{im}$, $\psi_j(y_n)=\delta_{jn}$ となる性質を満たす。式(1)の Lagrange の多項式を用いれば、例えば評価点(x,y)における変位 $u(x,y)$ および偏導関数は、次式のように表現できる。

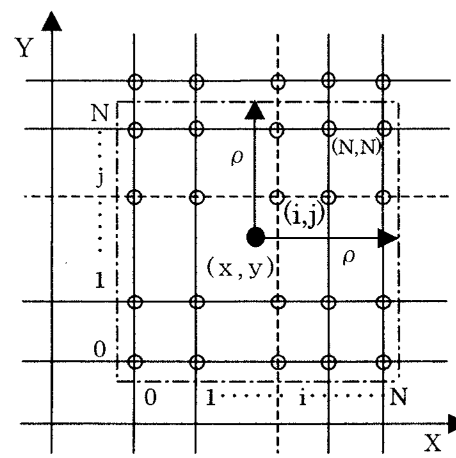

図 1　評価点(x , y)とサポート領域

$$
u(x,y)=\mathbf{N}_0^T(x,y)\mathbf{u}, \quad \partial u/\partial x=\mathbf{N}_1^T(x,y)\mathbf{u}, \quad \partial u/\partial y=\mathbf{N}_2^T(x,y)\mathbf{u} \qquad (2)
$$

ここに、$\mathbf{N}_0$、$\mathbf{N}_1$ および $\mathbf{N}_2$ は Lagrange 基底およびその微分からなる係数ベクトル、$\mathbf{u}$ は節点変位ベクトルである。式(2)によって、任意の評価点における関数値および微分値を、サポート領域内の節点変位で直接的に表現することができる。

3．二次元問題

微小変位理論に基づく二次元問題の仮想仕事の原理は、次式で表される。

$$
\iint_S \left[\left\{ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right\} + \left\{ G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) \right\} \right] dS
$$
$$
-\iint_S \left(\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v \right) dS - \int_{C_\sigma} \left(\bar{X}_\nu \delta u + \bar{Y}_\nu \delta v \right) dC = 0 \qquad (3)
$$

ここで、δu および δv は仮想変位を意味し、S は二次元弾性体の領域、C_σ は力学的境界条件が与えられている境界、E は Young 率、ν は Poisson 比をそれぞれ表している。式(2)を用いれば、式(3)の離散表示を導くことができる。

キーワード：エレメントフリー法，Lagrange 多項式，二次元問題，線形解析
〒326-8558　足利市大前町 268-1　足利工業大学大学院　TEL: 0284-62-0605　FAX:0284-64-1061

4．解析モデル

本研究では、図 2 に示すような、等分布荷重を受ける両端単純支持の梁を二次元問題として解析を行った。数値計算を行うにあたり、総節点数を 11×11＝121、Gauss 積分次数を 5、梁の高さ h＝1[m]、荷重 q＝9.8×10^4[Pa]、ヤング率 E＝2.058×10^5[MPa]、Poisson 比 ν＝0.3 とした。変化させたパラメータは表 1 に示す。

5．解析結果および考察

解析結果を図 3、4 および 5 に示す。図はいずれも Timoshenko の解析解[1]を基準とした時の、EFGM 解の誤差を表したもので、図 2 の点 A における y 方向変位 v に関する結果を図 3 に、点 B における x 方向垂直応力 σ を図 4 に、点 C におけるおける x 方向変位 u を図 5 にそれぞれ示した。図3および図4には、比較のために、初等梁理論の解析誤差も図示した。三者ともに縦軸に解析解との誤差 ε を、横軸に縦横比 h/L をそれぞれとって示した。誤差 ε は次式で定義する。

$$\varepsilon = |S - S_T| / |S_T| \times 100 \quad [\%] \qquad (4)$$

ここで、S は初等梁理論あるいは EFGM の解、S_T は Timoshenko の解析解をそれぞれ表している。いずれの解析結果からも明らかなように、EFGM 解析の結果は比較的良好な精度の近似解を与えている。変位 v については、図 3 から明らかなように、縦横比 h/L の増大とともに、すなわちモデルの形状が梁から板に近づくにつれて、初等梁理論の誤差が大きくなるのに対し、EFGM では 1%未満の高精度の解を得ることができた。図 4 を見ると、垂直応力 σ_x についても、全体的には良好な精度の解が得られているものの、縦横比によっては誤差が大きくなる場合が存在する。これはサポートパラメータ ρ の値の設定による影響であると考えられる。変位 u についても、図 5 に示されているように、縦横比 h/L＝0.2 の時に約 3.0％の誤差が生じているものの、概ね良好な解を得ることができた。

6．まとめ

本研究では、Lagrange 多項式に基づく EFGM を、簡単な二次元問題の解析に適用し、概ね良好な近似解を得ることができた。今後は、FEM との比較を通じ、解析手法の有用性を検証する予定である。

表 1　各種パラメータの値

	パラメータの数値
梁の全長 L (m)	1.0〜20.0
サポートパラメータ ρ	0.6〜6.6

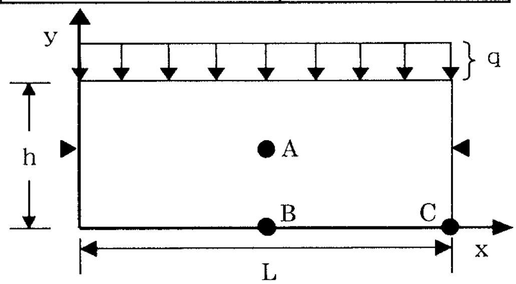

図 2　等分布荷重を受ける梁

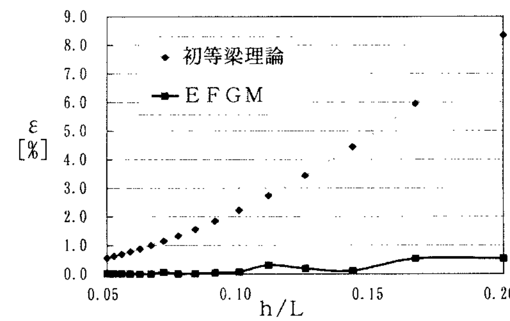

図 3　変位 v の誤差

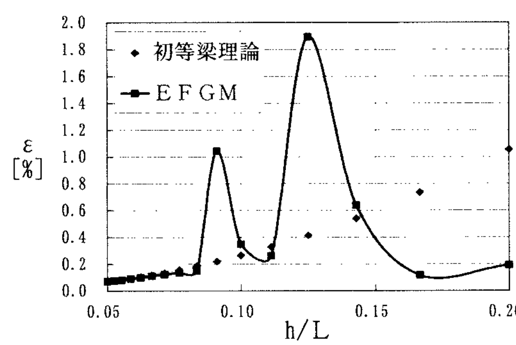

図 4　応力 σ_x の誤差

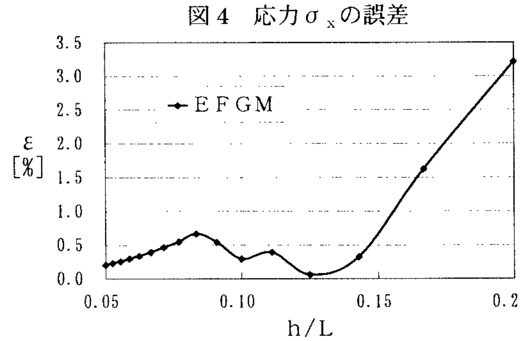

図 5　変位 u の誤差

参考文献

1)S.P.Timoshenko et al; THEORY OF ELAS TICITY,Third Edition,McGraw Hill,1970.