（Ⅰ－47）　***FEMモデルにおける影響線の作成法***

法政大学大学院　学生会員　山田 達雄
法政大学　フェロー　山下 清明

はじめに．

橋梁構造等をFEMモデル化し、移動荷重のもとでの応答を設計に反映していくことも、近い将来検討されるであろう。この場合、橋梁等の移動荷重を考慮する構造物は影響線の考え方が有効に利用できる。FEMモデルでの応力影響線を求める場合，既存の汎用FEM解析プログラムを利用すると、載荷領域全体にわたって逐次単位荷重を移動させ、その解析結果を整理して影響線を得ることとなり、非常に煩雑な作業となる。

ここでは、Bettiの相反定理を基礎とした考えから、着目する応力に対応した特定の荷重系(影響荷重系と名づけた)を算出し、これに対するFEMモデルの応答を得ることにより、応力の影響線を構造系の変形として、一度の解析で求める方法を提案する。

理論的背景．

一般力系Q_iを受けている構造において、荷重Q_iにより生ずる任意点Sでの応力状態をσ_{ij}と表す（図1(a)）。次に先の荷重について変形した構造が、境界条件に対して許容しうる仮想変位を生じさせるような別の力系の作用を受けると仮定する。その時、点iでのQ_i方向への変位をδ_i、任意点Sでの仮想ひずみはε_{ij}と規定する(図1(b))。これら、ふたつの力系に仮想仕事の原理を導入すると、次式のようになる。

$$Q_i\delta_i = \int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dv \qquad \text{------------------}\ (1)$$

(a)一般力系　　　　(b)仮想変形

図1連続体の力系

一方、任意要素内に生ずるひずみエネルギーの釣合いを考える。任意要素の節点力を$\{P\}_e$、節点変位を$\{U\}_e$とすると、ひずみエネルギーの釣合いは、次式のようになる。

$$\int_{v_e}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dv = \{P\}_e^T\{U\}_e \qquad \text{----------------------}\ (2)$$

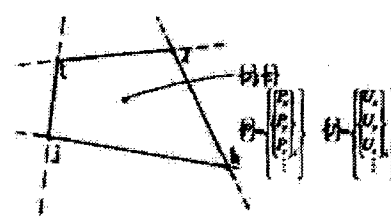

図2　任意要素の力系

式(2)について全要素を合計し、着目要素のみに$\{P\}_e$がある状態を考えれば、式(1)から次の関係が導かれる。これは、Bettiの相反定理*をFEMに適用したこととなる。

$$Q_i\delta_i = \{P\}_e^T\{U\}_e \qquad \text{---------------------}\ (3)$$

また、要素内の任意点の応力$\{\sigma\}_e$は、要素の節点変位$\{U\}_e$により以下のように表される。

$$\{\sigma\}_e = [D]_e[B]_e\{U\}_e \qquad \text{-----------------------}\ (4)$$

体積の次元をもった単位行列を導入して、式(4)の両辺にかける。

キーワード：影響線、ＦＥＭ、設計
〒184-0002　東京都小金井市梶野町3-7-2　法政大学　大型構造実験室　Tel：042-387-6293

$$\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\end{bmatrix}\{\sigma\}_e=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\end{bmatrix}[D]_e[B]_e\{U\}_e \qquad \text{(5)}$$

式(5)のＩ行について取り出せば、

$$1\times\sigma_{\mathrm{I}}=\langle db_{I1}\quad db_{I2}\quad\cdots\quad db_{In}\rangle_e\{U\}_e \qquad \text{(6)}$$

これより、$\{P\}_e^T=\langle db_{I1}\quad db_{I2}\quad\cdots\quad db_{In}\rangle$としたとき、式(3)と式(6)から次式が導き出される。
（影響線を求めるので$Q_i=1$とする）

$$1\times\delta_i=1\times\sigma_I \qquad \text{(7)}$$

これは、$\{P\}_e$に、式(6)のようなDBマトリックスの任意のＩ行を導入すれば、その荷重系$\{P\}_e$が作用した構造物の弾性線は、任意点Ｓにおける応力成分σ_{I}に相当する応力の影響線に等しいこと表している。こうして求めた荷重系$\{P\}_e$を影響荷重系と呼ぶ。

計算例． 2次元定ひずみ三角形要素を用いて簡単な計算例を示す。
長さ160、高さ20の梁を図３のように要素分割し、上部節点に単位荷重が移動した際の着目要素の軸方向応力(σ_x)の影響線を作成した。このモデルにおける解析手順を以下に示す。

Step 1． 以下に掲げる、ヤング率E、ポアソン比ν、着目要素を構成する座標データ$\{x, y\}$を下記数式に代入してDBマトリックスを計算。E=200000　ν＝0.25

$$\begin{bmatrix}x_i & x_j & x_k\\ y_i & y_j & y_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80 & 80 & 90\\ 10 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad [D]=\begin{bmatrix}24000 & 8000 & 0\\ 8000 & 24000 & 0\\ 0 & 0 & 8000\end{bmatrix}$$

$$[D][B]=\begin{bmatrix}0 & 800 & -2400 & -800 & 2400 & 0\\ 0 & 2400 & -800 & -2400 & 800 & 0\\ 800 & 0 & -800 & -800 & 0 & 800\end{bmatrix}$$

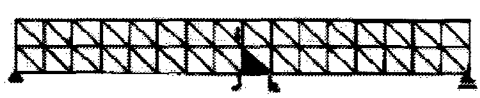

図３　モデル図

数式

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[D][B]\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}_i\\ \begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}_j\\ \begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}_k\end{Bmatrix}$$

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}$$

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_j-y_k & 0 & y_k-y_i & 0 & y_i-y_j & 0\\ 0 & x_k-x_j & 0 & x_i-x_k & 0 & x_j-x_i\\ x_k-x_j & y_j-y_k & x_i-x_k & y_k-y_i & x_j-x_i & y_i-y_j\end{bmatrix}$$

Step 2． このうちσ_xに対応する、１行目を$\{p\}^T$とし、要素を構成する節点に荷重として作用させて通常のFEM解析を行う。

$$\{p\}^T=\langle\langle p_x\quad p_y\rangle_i\quad\langle p_x\quad p_y\rangle_j\quad\langle p_x\quad p_y\rangle_k\rangle$$
$$=\langle 0\quad 800\quad -2400\quad -800\quad 2400\quad 0\rangle$$

Step 3． 解析の結果得られる上部節点のｙ方向変位が着目要素のσ_xの影響線となる。

結論．

解析結果は、単位荷重を上部節点に作用させた場合と一致し、高い精度で影響線を得られる。
FEM モデルにおける特定個所の応力の影響線を求めるのに有用である。

<参考文献>*構造力学とエネルギ原理　トーカート著，鷲津久一郎,岩本卓也 訳　ブレイン図書出版ｐ59、1980

キーワード：影響線、ＦＥＭ、設計

〒184-0002　東京都小金井市梶野町3-7-2　法政大学　大型構造実験室　Tel：042-387-6293