

(II-42) 安定化有限要素法を用いたVOF法に基づく気液二相流体の解析

中央大学大学院 学生員 ○瀬上 晴治
日本工営株式会社 正会員 櫻庭 雅明
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

土木工学で問題となる橋脚周りの流れや河川の氾濫等を自由表面流れ解析として追跡する際、自由表面は激しく変形することが考えられる。Euler的手法であるVOF (Volume of Fluid) 法¹⁾は自由表面を界面関数を用いて間接的に追跡するためにリメッシングの必要がなく、大変形を含む解析、また大規模な解析には有効な手法である。

本研究の目的は、砕波等を含む複雑な自由表面問題を精度よく解析し、的確に把握することである。そこで、VOF法に基づいた安定化有限要素法 (SUPG/PSPG法) を提案し、本手法の有効性について検討を行った。

2. 流れ場の計算

(1) 基礎方程式

非圧縮粘性流体の基礎方程式はNavier-Stokesの運動方程式 (式(1)) と非圧縮流体の連続の式 (式(2)) で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - f_i \right) - \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

(2) 安定化有限要素法 (SUPG/PSPG) による定式化

本論文では、基礎方程式の定式化にはP1/P1 (流速、圧力ともに1次) 要素を用いた安定化有限要素法を適用する。流速、圧力それぞれの重み関数を w_i , q_i とすると以下の式(3)のような弱形式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \cdot \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - f_i \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} q_i u_{i,i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{supg} u_j w_{i,j} \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k} - f_i \right) - \sigma_{ik,k} \right] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} q_{i,i} \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k} - f_i \right) - \sigma_{ik,k} \right] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_{cont} w_{i,i} \rho u_{j,j} d\Omega = \int_{\Gamma_h} w_i \hat{h}_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

左辺第1～3項と右辺項は式(1), (2)に対する通常の Galerkin項、第4項は上流化項 (SUPG項)、第5項は

圧力安定化項 (PSPG項)、第6項は衝撃捕獲 (shock-capturing) 項である。

(3) 有限要素方程式

式(3)の弱形式にP1/P1三角形1次要素を用いて補間を行い、有限要素方程式を導くと以下の式(4), (5)のようになる。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{N}(u_j) + \mathbf{N}_\delta(u_j)) u_i \\ & + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\delta) u_i - (\mathbf{G} + \mathbf{G}_\delta) p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\delta \quad (4) \\ & (\mathbf{G}^t + \mathbf{G}_\epsilon^t) u_i + \mathbf{M}_\epsilon \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{N}_\epsilon(u_j) u_i \\ & + \mathbf{K}_\epsilon u_i + \mathbf{G}_\epsilon p = \mathbf{E} + \mathbf{E}_\epsilon \quad (5) \end{aligned}$$

なお、時間方向の離散化については、運動方程式に関しては流速にCrank-Nicolson法を適用し、圧力は陰的に扱った。連続式に関しては流速を陰的に扱った。また、連立一次方程式の解法には式(4), (5)を連立させてElement-by-Element BiCG-STAB法を適用した。

3. 自由表面の計算

(1) 基礎方程式

本論文ではVOF法を用いて自由表面を追跡していく。自由表面の運動学的条件は、自由表面上の流体粒子は常に自由表面上に存在することである。そこで界面関数 ϕ を式(4), (5)から求められた流速を用いた移流方程式 (式(6)) で解き、界面を追跡する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

解析を行うにあたっての初期の設定として、計算領域に水と空気が存在するならば、水の存在する領域の節点には $\phi = 1$ を、空気の存在する領域の節点には $\phi = 0$ を与える。ここで、各節点の密度 ρ , 粘性係数 μ は界面関数 ϕ を用いて以下の式(7), (8)で決定される。

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi) \quad (7)$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \quad (8)$$

ここで ρ_l , ρ_g はそれぞれ水、空気の密度、 μ_l , μ_g はそれぞれ水、空気の粘性係数である。

(2) 安定化有限要素法 (SUPG) による定式化

定式化には非圧縮粘性流体の計算と同様に安定化有限要素法を適用し、関数 ϕ の重みを w とすると以下の式(9)のような弱形式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau_\phi u_i w_{,i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \phi_{,j} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Key Word: VOF法, 安定化有限要素法, 同次補間三角形要素
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

(3) 有限要素方程式

式(9)の弱形式に三角形1次要素を用いて補間を行い、有限要素方程式を導くと以下の式(10)のようになる。

$$(M + M_\delta) \frac{\partial \phi}{\partial t} + (N(u_i) + N_\delta(u_i)) \phi = 0 \quad (10)$$

式(10)で界面関数 ϕ が解かれることによって、水の存在する領域(節点の $\phi = 1$)は刻々と変化し、自由表面の存在する位置は ϕ の不連続面として表現される。なお、時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用い、連立一次方程式の解法には BiCG-STAB 法を用いた。

4. 数値解析例

(1) ダムブレイク問題

本手法の有効性を検討するために、ダムブレイク問題の計算を行った。初期の設定として図1に示すように鉛直に置かれた板によって静止している幅0.45m、高さ0.90mの水柱を考える。

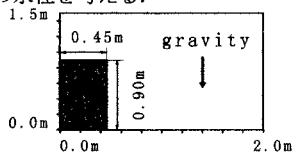


図1 ダムブレイク問題計算モデル

有限要素分割は、水平方向に80要素、鉛直方向に60要素(節点数4941、要素数9600)とし、時間増分量は $\Delta t = 10^{-4}$ secとした。

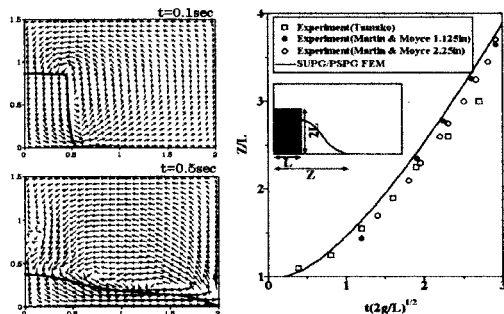


図2 流速ベクトル図、先端位置の実験値との比較

図2に流速ベクトル図、ならびに既往の実験結果と本手法による計算を比較したものを示す。これより、本手法を用いた計算結果は液相の変形が滑らかに再現されていることが分かる。また、実験値と若干のずれは見られるものの、妥当な結果が得られているといえる。

(2) Kelvin-Helmholtz 不安定問題

本手法は、密度と粘性係数の値を変化させることによって、様々な二相流体について計算を行うことも可能である。計算例として、Kelvin-Helmholtz 不安定問題を取り上げ、内部波に対する再現性を確認することを目的とした計算を行った(図3)。計算モデル²⁾は上層に液体1(密度 1000 kg/m^3 、粘性係数 $1.00 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$)、下層に液体2(密度 1050 kg/m^3 、粘性係数 $1.20 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$)が置かれている。

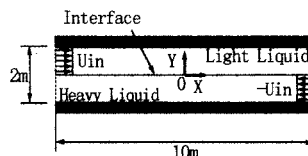


図3 Kelvin-Helmholtz 不安定問題の計算モデル

$t \leq 0$ において上層の流体は x 軸正方向に、下層の流体は x 軸負方向にそれぞれ一定かつ一様な速度 ($U_{in} = 0.1 \text{ m/s}$) で流れている。 $t = 0$ の瞬間のみに、界面 ($y = 0$)に以下の式(11)、(12)のような擾乱を与えた。

$$u = 0.1 \sin(\pi x) \quad (\text{m/s}) \quad (11)$$

$$v = 0.1 \cos(\pi x) \quad (\text{m/s}) \quad (12)$$

なお、有限要素分割は水平方向に200要素、鉛直方向に40要素(節点数8241、要素数16000)とし、時間増分量は $\Delta t = 10^{-3}$ secとした。

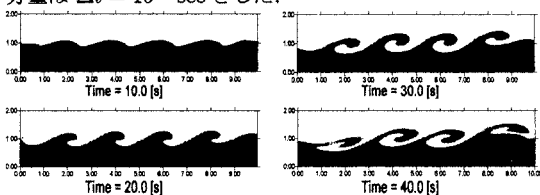


図4 渦の成長の様子 ($t = 10.0, 20.0, 30.0, 40.0$ (s))

図4に計算開始から自由表面の形状を追跡した結果を示す。静止していた界面に正弦波が現われ、やがて渦を巻く様子が再現されている。

5. おわりに

本論文では、P1/P1要素による安定化有限要素法を用いたVOF法に基づく自由表面流れ解析を用いて、手法の有効性に関する検討を行った。

- 安定化手法(SUPG/PUPG法)を適用したことにより、流速の卓越するような自由表面流れ解析についても安定かつ精度の高い解を得ることが可能となった。
- 本手法を既往の実験と比較した結果、比較的良好一致を示し計算精度の観点から有効性が確認できた。
- 本手法は非構造格子(三角形の同次補間要素)を用いているため、今後複雑な形状を有するような応用例への適用が期待できる。

今後の課題として、各種問題へ適用すると同時に、界面捕獲の精度向上に関する検討及び三次元への拡張を予定している。

参考文献

1. C. W. Hirt and B. D. Nichols, : Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comput. Phys., 39, pp.201-225 (1981).
2. T. Nakayama and M. Shibata, : A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, Comput. Mechanics, 22, pp.194-202 (1998).